

بررسی مسئله ی ریمان برای مخلوط پیش آمیخته ی اکسیژن و هیدروژن

سید عبدالمهدی هاشمی^{۱*}، میثم امینی^۲، احسان روحی^۳، مصطفی محمودی^۴

دانشگاه کاشان، دانشکده مهندسی، گروه مهندسی مکانیک

(Hashemi@kashanu.ac.ir*)

چکیده

در مقاله حاضر، مسئله ی لوله ی ضربه تحت عنوان مسئله ی اول ریمان، برای یک مخلوط پیش آمیخته ی اکسیژن و هیدروژن در شرایط تغییرات ضریب اتمیسته با دما، برای حالت های زیر صوت و مافوق صوت، مورد بررسی قرار گرفته است. علاقه به بررسی این مسئله از چندین دیدگاه از جمله بررسی عددی مسئله در مواجهه با ناپیوستگی موجود و در حضور حل تشابهی و همچنین کاربرد عملی در مسائل لوله ضربه در آزمایشگاه، همواره مد نظر بوده است. معادلات حاکم بر مسئله به فرم انتگرالی استخراج شده و سپس یک الگوریتم حل با استفاده از مراجع دیگر، ارائه گردیده است. ملاحظه شد که تاثیر عمده ی تغییرات دمایی، در ناحیه ی فن انبساطی بروز می کند که میزان این تغییرات در حالت مافوق صوت، به صورت مجانبی با حالت ضریب اتمیسته ی ثابت، قابل مشاهده می باشد.

واژه های کلیدی: مسئله ریمان - لوله ضربه - مخلوط گازی - موج ضربه ای - فن انبساطی

۱- مقدمه

حل دقیق مسئله کلاسیک لوله ضربه (Shock Tube) تحت عنوان مسئله اول ریمان (First Riemann Problem) شناخته می شود. برای گازهای کامل این مسئله دارای حل تحلیلی بوده که این حل در منابع مختلف دینامیک گاز موجود می باشد [۱]. اما برای مخلوطی از گازهای ایده آل که از لحاظ کالریک (Caloric) کامل نیستند، این مسئله حل تحلیلی نخواهد داشت. در عین حال، روش های تشابهی ارائه شده در مرجع [۱] می تواند برای حل این مسئله در مورد ترکیب های تعادلی یا ترکیب خنثای گازها مورد استفاده قرار گیرد.

در گذشته تمرکز تحقیقات انجام شده در دو قسمت بوده است: (۱) بررسی محیط های مختلف که موج ضربه ای با آن برخورد می کند؛ از جمله مخلوط گاز و جامد و یا ترکیبی از دو یا چند گاز. (۲) ارائه روش های عددی جدید برای حل معادلات حاکم. دیتردینگ [۲] یک روش تطبیقی از نوع حجم محدود را برای تحلیل احتراق هایی که در آن موج ضربه ای در محیط هایی شامل ترکیبی از $H_2 - O_2$ حرکت می کند، بکار برد. وی معادلات بقا به فرم پایستار را ارائه نمود که این معادلات شامل جملاتی از قبیل بردار کمیات پایستار، شارهای ترمودینامیکی و نیز جمله های چشمه ناشی از واکنش های شیمیایی بود. او به کمک روش عددی ارائه شده، یک روش قابل اعتماد با نتایج قابل قبول برای گسسته کردن معادلات با وجود مخلوطی از گازهای ایده آل ارائه نمود. روش های تطبیقی دیگری نیز توسط سایر محققین ارائه شده است که در این میان برگر [۳]

۱- استادیار گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه کاشان

۲- دانشجوی کارشناسی ارشد مهندسی مکانیک، دانشگاه کاشان

۳- دانشجوی کارشناسی ارشد مهندسی مکانیک، دانشگاه کاشان

۴- دانشجوی کارشناسی ارشد مهندسی مکانیک، دانشگاه کاشان

تحقیقاتی متمرکز بر مخلوط های گازی غیرواکنشی با تغییرات گرمای ویژه مبتنی بر تغییرات دما انجام داد. از روش های ارائه شده برای حل مسئله ریمان در روش های عددی حل جریان های تراکم ناپذیر استفاده می شود. یکی از این روش های موثر، روش سهموی نقطه به نقطه (PPM) بود که توسط کوللا و وودوارد [۴] ارائه شد که در حقیقت گسترش یافته مرتبه بالاتر روش معروف گودانوف [۵] می باشد که در آنها از حل ریمان استفاده می شود.

مطالعات بعدی در این زمینه در دو بخش ادامه یافت: (۱) مخلوط گازها با وجود ذرات جامد خنثی و غیر واکنشی. (۲) مخلوط گاز و ذرات واکنشی. در همین راستا، کاریب و رادیگتر [۶ و ۷] مسئله ریمان را با وجود مخلوطی از ذرات جامد و هوا مورد بررسی قرار دادند. پارک و بانک [۸] برخورد موج ضربه ای و ذرات جامد را برای مخلوط در حالت خنثی و برای مخلوطی از اکسیژن و ذرات کربن بررسی کرده و برای سهولت، واکنش انجام شده را به صورت یک واکنش تک مرحله ای در نظر گرفتند. آنها در محاسبات خود از جملات مربوط به انتقال حرارت و ضریب دراگ مربوط بین گاز و ذرات صرف نظر کردند.

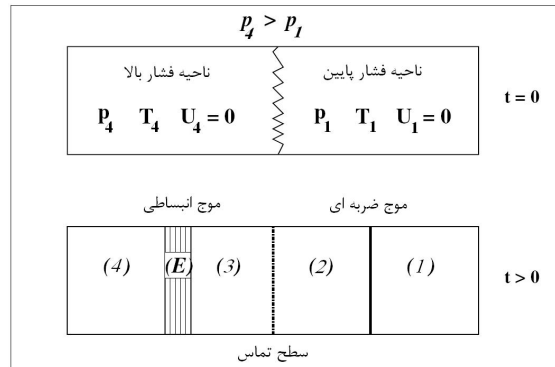
برخی دیگر از محققین به بررسی تفاوت های بین لوله ضربه محتوی گاز خالص و همچنین حالت مخلوط گاز و ذرات جامد پرداختند [۹]. در این تحقیقات اثرات تغییر چگالی و گرمای ویژه ذرات جامد بر خواص ترمودینامیکی مختلف ارائه شده است. در دسته ای دیگر از مطالعات، مسئله ریمان در حالت دوفازی مورد بررسی قرار گرفته است. شوندمان و همکاران [۱۰] با توجه به روش گودانوف، مسئله ریمان را برای مخلوط های دو فازی مورد بررسی قرار دادند. آنها بر خلاف محققین قبلی، در محاسبات خود از جمله های چشمه مربوط به انتقال حرارت، جابجایی جرم و ممنوم بین فازها و نیروی مقاوم صرف نظر نکردند و نهایتاً مقادیر چگالی، فشار و سرعت را برای مناطق چهارگانه لوله ضربه در هر دو فاز محاسبه نمودند. نتایج آنها نشان داد که روش عددی مورد استفاده بخصوص در مجاورت سطح تماس، جایی که مولفه غیر پایستار معادلات بقا اهمیت ویژه ای پیدا می کند، از دقت مطلوبی برخوردار است.

اخیراً نیز کونفورتو و همکاران [۱۱] مسئله ی ریمان را برای حالت مخلوط گازی تحت واکنش های بیومولکولی در شرایط برگشت پذیر و برگشت ناپذیر مورد مطالعه قرار داده اند. آنها معادلات حاکم را بر مبنای مرتبه ی معادلات اوپلر در معادلات بولتزمن، مورد استفاده قرار دادند و در نتیجه قوانین تعادل را به فرم جدید بدست آوردند. آنها همچنین اثرات انتروپی و اتلاف را مورد بررسی قرار داده و نقش جمله چشمه را در معادلات مورد بررسی قرار دادند و دریافتند که وقوع واکنش شیمیایی به عنوان ترم غیر همگن در مسئله، باعث افزایش دامنه ی پرش در نقاط ناپیوستگی، خواهد شد.

بخش عمده ای از تلاش هایی که در گذشته برای حل مسئله ریمان در حالات مختلف انجام شده در واقع متوجه حل مسئله موج ضربه ای بوده است. هدف از مطالعه ی حاضر، حل همزمان مسئله ی ریمان برای موج های ضربه ای و انبساطی در یک لوله ی ضربه برای یک مخلوط گاز پیش آمیخته $H_2 - O_2$ ، و فرض وابستگی دمایی ضریب اتمیسیته $(\gamma = \gamma(T) = c_p / c_v)$ ، با صرف نظر از اثرات واکنش شیمیایی می باشد. لازم بذکر است که این دو مسئله در سطح تماس (غشا) لوله ی ضربه، به یکدیگر وابسته می باشند. در ادامه، پس از ارائه معادلات بقا و الگوریتم مورد نظر برای حل مسئله ریمان، به ارائه نتایج و بحث در مورد آن خواهیم پرداخت.

۲- معادلات حاکم و روش حل مسئله ریمان

در حالت کلی، لوله ی ضربه به شکل یک لوله ی بلند یک بعدی و با طرفین بسته بوده که به وسیله ی یک دیافراگم به دو قسمت تقسیم شده است. در مسئله ی حاضر، دو طرف لوله ی ضربه از یک مخلوط گازی پیش آمیخته با فشار، دانسیته و احیاناً دمایی متفاوت پر شده است. قسمت فشار بالا "ناحیه ی محرک" و قسمت فشار پایین "ناحیه ی متحرک" نامیده می شود. جزئیات مسئله در شکل (۱) قابل مشاهده می باشد.



شکل ۱- شرایط مقدماتی اعمالی در لوله ی ضربه ($t = 0$) و موقعیت موج ها پس از پاره شدن غشا ($t > 0$).

در شکل فوق، فشار، دما و دانسیته در قسمت های فشار بالا و فشار پایین مشخص شده و سرعت گاز هم در طرفین صفر می باشد. با پاره شدن غشا، فرایندهای شکل گرفته درون لوله، به طور طبیعی منجر به از بین رفتن اختلاف فشار اولیه می گردند. گازهایی که در قسمت محرک قرار دارند، در طول یک فن پرانتل مایر انبساط یافته و به سمت قسمت فشار پایین حرکت می کنند و همزمان با این حرکت، پهنای ناحیه ی انبساطی افزایش می یابد. در اثر تراکم ناحیه ی فشار پایین یک موج ضربه ای ایجاد می شود که در قسمت فشار پایین حرکت می کند. گازهای منبسط شده از گازهای متراکم جدا هستند که می توان آن را به صورت یک غشای فرضی در نظر گرفت که با سرعت ثابت به سمت راست در حرکت است.

شایان ذکر است که پارامتر های جریان از قبیل فشار، دما، سرعت و... در محل موج ضربه ای و غشا، ناپیوستگی داشته که باعث بروز مشکلاتی در حل مسائل لوله ی ضربه می گردد. در این راستا، فرضیات حاکم بر مسئله به شرح زیر می باشد:

- جریان را تراکم پذیر، غیر لزج، بدون واکنش شیمیایی و تبادل گرما، در نظر می گیریم.
- از اثرات کشش سطحی و گرانش صرف نظر می کنیم.
- مخلوط دو گاز را به صورت یک محیط پیوسته در نظر می گیریم؛ چگالی، مومنتوم و انرژی در هر نقطه از دامنه قابل تعیین می باشند (این توابع لزوماً پیوسته نیستند).
- سیال بکار رفته در لوله ی ضربه، مخلوط پیش آمیخته ی اکسیژن و هیدروژن، $H_2 - O_2$ ، می باشد.
- مخلوط در حالت خنثی (غیر واکنشی) فرض می شود.
- ضریب اتمیسیته ی اجزاء مخلوط، تابع دما در نظر گرفته می شود.

با توجه به فرضیات فیزیکی مطرح شده، معادلات مورد نظر به صورت معادلات جریان تراکم پذیر، به فرم تعادلی قابل بیان می باشند: تعادل جرم ρ ، مومنتوم $\rho \vec{V}$ و انرژی کلی ویژه ρE :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{V}) = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial(\rho \vec{V})}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{V} \otimes \vec{V}) + \overline{\text{grad}} P = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial(\rho E)}{\partial t} + \text{div}((\rho E + P)\vec{V}) = 0 \quad (3)$$

به منظور حل این سیستم معادلات، باید از روابط به فرم بسته تری استفاده نمود. در حالت مواجهه با یک سیال، معمولاً از معادله حالت به فرم $P = P(\rho, e)$ که فشار را به دانسیته ρ و انرژی داخلی e با استفاده از رابطه $E = e + 1/2 \|\vec{V}\|^2$ مربوط می سازد، استفاده می کنیم. استفاده از معادله ی گاز کامل به فرم $P = (\gamma - 1)\rho e$ که $\gamma = c_p / c_v$ معرف نسبت ظرفیت های گرمایی ویژه می باشد، از جمله موارد رایج بشمار می رود. در رابطه با این موضوع، روابط دیگری نیز وجود دارند. برای مثال، معادله ی گاز Stiffen به فرم $P = (\gamma - 1)\rho e - \gamma P_\infty$ را می توان برای انواع مختلف مواد استفاده نمود. ثابت های γ و P_∞ در حالت کلی بستگی به ماده ی مورد استفاده داشته و با اندازه گیری های آزمایشگاهی قابل حصول می باشند. این رابطه معمولاً به دلیل ارتباط آن با سیالات و گازها انتخاب شده است. ثابت های اخیر با توجه به طبیعت سیال مشخص می شوند. در این حالت، فشار محیط علاوه بر چگالی و انرژی داخلی، به محل قرارگیری صفحه ی تماس بین دو طرف لوله ی ضربه نیز وابسته می باشد. در حقیقت، صفحه ی تماس به عنوان یک ناپیوستگی در خواص فیزیکی در یک محیط پیوسته، به شمار می آید.

در ادامه، برای تعیین فشار و بررسی سایر مقادیر سیستم، نیاز به پاره شدن صفحه ی تماس داریم. سطح تماس با سرعت پیوسته حرکت کرده و کمیت ϕ نشاندهنده ی مکان آن می باشد. رابطه ی زیر بر این کمیت حاکم می باشد:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \vec{V} \cdot \text{grad } \phi = 0 \quad (4)$$

با استفاده از معادله ی تعادل جرم، معادله ی جابجایی اخیر را می توان به فرم بقاء، بازنویسی نمود:

$$\frac{\partial(\rho \phi)}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{V} \phi) = 0 \quad (5)$$

کمیت ϕ را می توان به فرم های مختلفی انتخاب نمود (کسر حجمی، تابع تراز و ...). بدین منظور، تاکنون روش های عددی مختلفی برای سطوح تماس ارائه شده است: روش های VOF (هیرت و نیکولز [۱۲])، روش های تعقیب پیشرو (ستیان و همکاران [۱۳] و گلیم [۱۴]) یا روش های چندسیالی (سائورل و آبگرال [۱۵]). در نهایت، دستگاه زیر قابل حصول می باشد:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial f(U)}{\partial x} = 0, \quad x \in R, t > 0 \quad (6)$$

که در حالت کلی:

$$U = (\rho, \rho u, \rho E, \rho \phi)^T$$

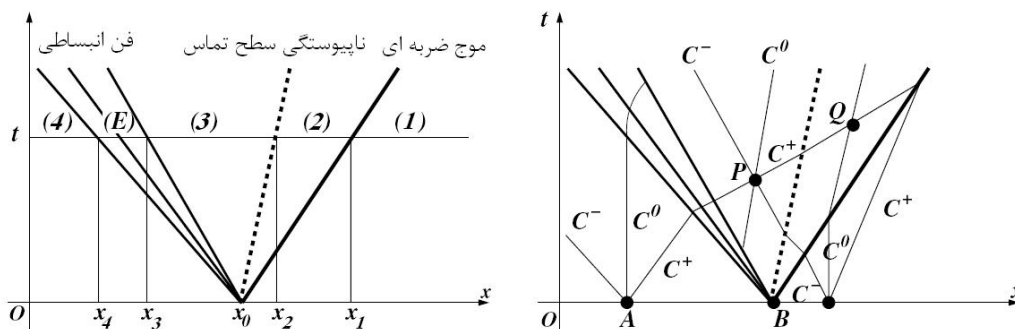
$$f(U) = (\rho u, \rho u^2 + P, (\rho E + P)u, \rho \phi u)^T \quad (7)$$

$$E = e + \frac{1}{2}u^2, \quad P = (\gamma(\phi) - 1)\rho e - \gamma(\phi)P_\infty(\phi)$$

این دستگاه در حالت کلی معروف به مسئله ی کوشی بوده و در واقع یک حل کلی در ارتباط با مسئله ی ریمان در حالت یک بعدی، مستقل از ترکیب سیال اولیه، می باشد.

در ارتباط با بررسی مسئله ی ریمان برای یک مخلوط گازی در یک لوله ی ضربه، در حالت فرض اجزای گازی ایده آل، می توان یک روش حل تشابهی را برای مخلوط گازی در حالت خنثی و یا تعادل شیمیایی، ارائه نمود. در ادامه با توجه به راه های ممکن برای یافتن یک روش حل مناسب، روش مورد استفاده در این نوشتار ارائه گردیده است.

ساختار اصلی موج که در اولین مسئله‌ی ریمان مطرح می‌شود، در شکل (۲) در یک نمودار مکان-زمان، قابل مشاهده می‌باشد. موج شوک با سرعت U به طرف گاز رانده شده حرکت کرده و یک فن انبساطی نیز به سمت گاز محرک حرکت می‌کند. حالت های ۱ تا ۴، در نمودار قابل رویت می‌باشند.



شکل ۲- شمایی از حل تشابهی مسئله‌ی لوله‌ی ضربه در صفحه‌ی (x, t) (چپ). خطوط مشخصه‌ی بکار رفته به منظور محاسبه‌ی حل (راست).

با اعمال فرم انتگرالی معادلات بقاء، معادلات کوشی به صورت زیر قابل بازنویسی می‌باشند:

$$\rho_1 U = \rho_2 (U - u_2) \quad (8)$$

$$P_1 + \rho_1 U^2 = P_2 + \rho_2 (U - u_2)^2 \quad (9)$$

$$h_1 + \frac{1}{2} U^2 = h_2 + \frac{1}{2} (U - u_2)^2 \quad (10)$$

لازم بذکر است که پارامترهای فشار P ، چگالی ρ ، سرعت U و آنتالپی h ، هر یک معرف خاصیت مخلوط مورد نظر در مکان مربوطه می‌باشند و از نوشتن فرمولاسیون به صورت کسر جزئی اجزای مخلوط، به دلیل اختصار، صرفنظر می‌کنیم. در ادامه، معادله‌ی (۸) را می‌توان به فرم زیر منظم نمود:

$$u_2 = U \left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_2}\right) \quad (11)$$

با جایگذاری معادله‌ی اخیر در معادلات (۹) و (۱۰) خواهیم داشت:

$$P_2 = P_1 + \rho_1 U^2 \left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_2}\right) \quad (12)$$

$$h_2 = h_1 + \frac{1}{2} U^2 \left\{1 - \left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^2\right\} \quad (13)$$

در ادامه، برای مشخص کردن معادله حالت کالریک خواهیم داشت:

$$h_2 = h(P_2, \rho_2, y_2) \quad (14)$$

که برای جریان خنثی (حالت بدون واکنش)، $y_2 = y_1$ و معادله‌ی اخیر برای یک سیستم از گازهای ایده آل با استفاده از کد CHEMKIN، محاسبه شده است (کی و همکاران [۱۶]). برای جریان تعادلی، $y_2 = y_e(P_2, \rho_2)$ که y_e معرف ترکیب

تعادلی در شرایط ترمودینامیکی معلوم شده، می باشد. این معادله‌ی تعادل با استفاده از روابط کاربری EQUIL و STANJAN موجود در کد اصلی CHENKIN، محاسبه شده است.

ناحیه‌ی فن انبساطی، یک ناحیه‌ی موج ساده است که خطوط مشخصه متمایل به چپ C^- به شکل خطوط مستقیم و متغییر ریمان (Riemann Invariant)، J^+ ، شامل دسته‌ی دیگری از مشخصه‌ها با عنوان C^+ ، در همه جا ثابت می‌باشند (شکل ۲). یعنی:

$$J^+ = u + \int_{P_{ref}}^P \frac{dP}{\rho c} \quad (15)$$

که P_{ref} معرف فشار مرجع می باشد. با هم ارز ساختن J^+ در حالت ۴ با هر حالت لحظه‌ای درون فن انبساطی، و با توجه به اینکه $u_4 = 0$ ، داریم:

$$u = \int_P^{P_4} \frac{dP'}{\rho c} \quad (16)$$

که برای حالت خاص بین ۳ و ۴:

$$u_3 = \int_{P_3}^{P_4} \frac{dP}{\rho c} \quad (17)$$

بعلاوه، شرایط در فن انبساطی به صورت ایزنتروپیک است، یعنی $S = S_3 = S_4$ که S معرف انتروپی می باشد. موقعیت فن انبساطی از دانستن اینکه خطوط مشخصه C^- به صورت مستقیم می باشند، قابل تعیین است. بدین معنی که:

$$\frac{dx}{dt} = u - c = const. \quad (18)$$

بنابراین،

$$\frac{x}{t} = u - c \quad (19)$$

در سطح تماس، حل های موج شاک و فن انبساطی با یکدیگر کوپل می باشند. از طرفی مقادیر سرعت و فشار در این نقطه باید با یکدیگر تطابق داشته باشند، یعنی $u_2 = u_3$ ، $P_2 = P_3$. لازم بذکر است که سرعت سطح تماس همان سرعت جریان u_2 و یا u_3 می باشد.

۳- الگوریتم حل

با داشتن حالت های ۱ و ۴، مسئله‌ی ریمان با استفاده از الگوریتم زیر به روش تکرار قابل حل می باشد:

۱. حدس سرعت موج شاک U.
۲. حل شرایط پرش شاک برای بدست آوردن حالت ۲:

 - حدس ρ_1/ρ_2 بین ۰ و ۱ و $\rho_2 \leftarrow$
 - استفاده از معادله‌ی (۱۲) $P_2 \leftarrow$
 - یافتن خطا بین معادلات (۱۳) و (۱۴).
 - تکرار سه مرحله‌ی اخیر تا همگرا شدن خطا به صفر.
 - در معادله‌ی (۱۱) $u_2 \leftarrow$

۳. با اعمال $P_2 = P_3$ و انتگرال گیری از معادله (۱۷)، می توان u_3 را بدست آورد. انتگرال گیری باید به صورت عددی انجام شود که روش مورد استفاده در این نوشتار، قاعده ی $1/3$ سیمپسون می باشد. به منظور محاسبه ی انتگرال، روند زیر را دنبال می کنیم:

- جریان خنثی: در این حالت به ازای هر مقدار متغیر P در انتگرال گیری، رابطه ی زیر را به روش تکرار برای محاسبه ی دما در هر نقطه ی متناسب در فن انبساطی، حل می کنیم:

$$s_4 = s(P, T, y_4) \quad (20)$$

که تابع $s(P, T, y_4)$ با استفاده از کد CHEMKIN قابل محاسبه می باشد. همچنین داریم:

$$\rho = \frac{P}{R_g(y_4)T} \quad (21)$$

$$c = \sqrt{\gamma(T, y_4)R_g(y_4)T} \quad (22)$$

که $R_g = R_{mix}/M_{mix}$ معرف ثابت جهانی گازها و R_{mix} و M_{mix} به ترتیب معرف ثابت مخلوط گازها و جرم مولکولی مخلوط گازی می باشند. از آنجا که ترکیب اولیه ی گازها در قسمت پر فشار به صورت پیش مخلوط می باشد، می توان از تابعیت پارامترهای مذکور در دو معادله ی اخیر نسبت به y_4 ، صرف نظر نمود. در ادامه می نویسیم:

$$\gamma(T) = \frac{c_p(T)}{c_p(T) - R} \quad (23)$$

که مقادیر ظرفیت حرارتی ویژه ی مخلوط در فشار ثابت $c_p(T)$ ، در مراجع مختلف از جمله NASA، برای اجزای گازی و همچنین مخلوط آنها، قابل دسترس می باشد.

- جریان تعادلی: در این حالت، شرایط تعادلی نقاط فن انبساطی را برای هر P و انتروپی $s = s_4$ با استفاده از رابط EQUIL بدست می آوریم. با این کار، پارامترهای ρ و c بدست می آیند. در اینجا c سرعت صوت مخلوط تعادلی می باشد.

۴. در صورتیکه $u_2 \neq u_3$ ، به مرحله ی ۱ بازگشته و حدس جدیدی برای U می زنیم و این روند را تکرار می کنیم. در صورت همگرا شدن مراحل ۱ تا ۴، تمامی حالت های مقدماتی لازم در فن انبساطی، بدست می آیند. برای هر فشار مورد نیاز بین P_3 و P_4 ، مقادیر ρ ، T و c متناظر را به همان روش انتگرال گیری مطرح شده در مرحله ی ۳ می توان بدست آورد. در ادامه، سرعت متناظر با هر نقطه را می توان با انتگرال گیری از معادله ی (۱۶) با همان روند ارائه شده در مرحله ی ۳ برای (۱۷)، تعیین نمود.

در نهایت، معادله ی (۱۹) رابطه ی x/t را برای تمامی حالات فن انبساطی بدست می دهد.

۴- نتایج و بحث

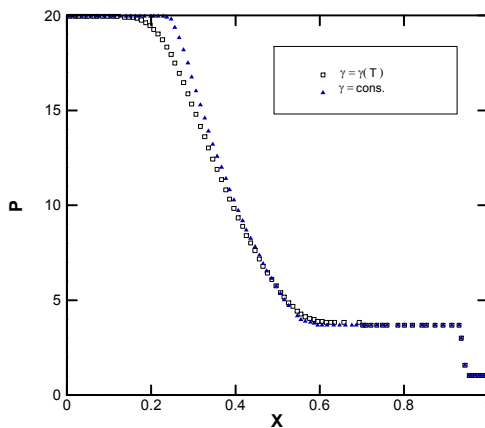
با اعمال الگوریتم حل بر روی مسئله ی مورد نظر، مقادیر کمیت های ترمودینامیکی در هر یک از ۴ ناحیه ی به وجود آمده، بدست می آیند. به منظور تفسیر نتایج حاصله و همچنین تعمیم آنها به حالت کلی تر، با اعمال پارامترهای بی بعد به مسئله، نتایج در حالت بدون بعد ارائه می شوند. بدین منظور، پارامترهای بی بعد را به شکل زیر تعریف می کنیم:

$$\rho^* = \rho/\rho_1, \quad U^* = U/c_1, \quad c^* = c/c_1, \quad T^* = T/\gamma T_1 \quad (24)$$

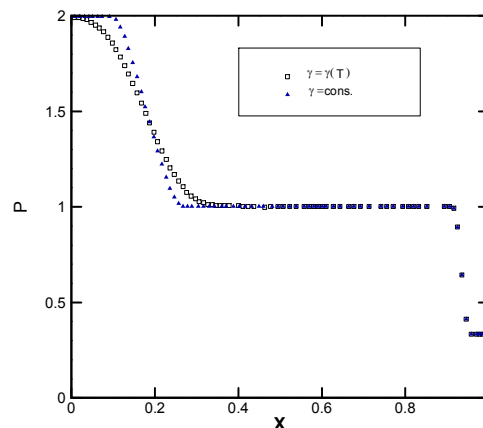
$$P^* = P/(\rho_1 c_1^2) = P/(\gamma P_1), \quad h = h/c_1^2, \quad x^* = x/L, \quad t^* = t/(L/c_1)$$

که L در واقع طول لوله ی ضربه می باشد. از آنجا که مقادیر کمیت های مخلوط در حالت بدون بعد بر روی نمودارها قابل

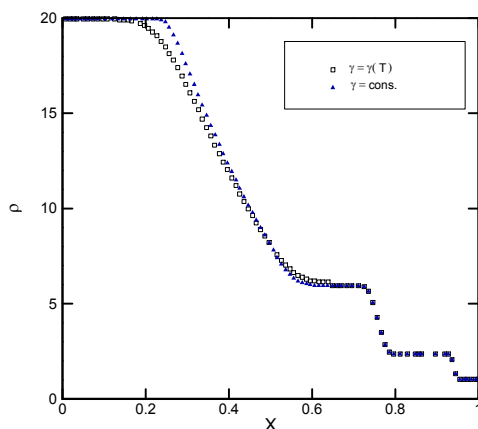
رویت می باشند، از آوردن مقادیر با بعد در هر یک از نواحی و همچنین حالت اولیه ی حل، صرفنظر می کنیم. در شکل ۳، تغییرات پارامترهای فشار، چگالی و سرعت به فرم بی بعد بر حسب طول لوله ی ضربه ی بدون بعد در هر دو حالت ضریب اتمیسیتی ی ثابت و متغییر با دما در شرایط زیر صوت و مافوق صوت برای یک مخلوط پیش آمیخته اکسیژن و هیدروژن، نشان داده شده است. نسبت فشار دو طرف غشا در شرایط اولیه، برای حالت جریان زیر صوت، ۴ و در جریان مافوق صوت، ۲۰ در نظر گرفته می شوند. فرم کلی جواب های بدست آمده برای تمامی متغییر ها در هر دو حالت زیر و مافوق صوت، به یکدیگر شباهت دارند. بدین معنی که با فرض مخلوط خنثی و در واقع صرفنظر از اثرات واکنش شیمیایی، تغییرات خواص در طول لوله، مطابق انتظار با حالت تک گاز می باشد. از سویی، از آنجائیکه اثر تغییرات پارامتر γ در معادلات، مربوط به ناحیه ی فن انبساطی می باشد، مشاهده می گردد که عمده تغییرات در خواص، در این ناحیه رخ می دهد. از آنجا که اثر تغییرات γ در مسئله، خود را به فرم تغییرات در پارامتر $c_p(T)$ در معادلات نشان داده است، لذا با دانستن این نکته که این تغییرات به فرم چند جمله ای با دما می باشد، انتظار می رود که در ناحیه ی فن انبساطی، تغییرات کمیت های مربوطه، با تغییر در شیب منحنی مربوطه، خود را نشان دهند. این امر در مورد تمامی پارامتر های موجود در شکل ۳، قابل مشاهده می باشد.



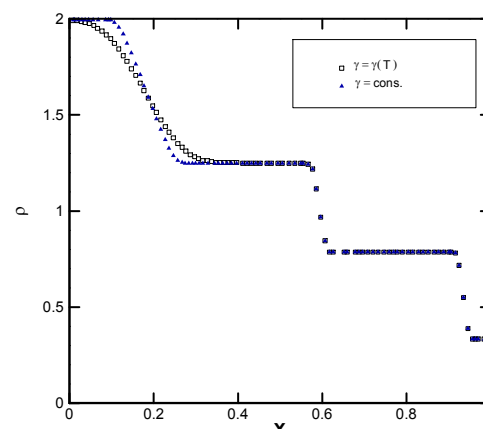
ب



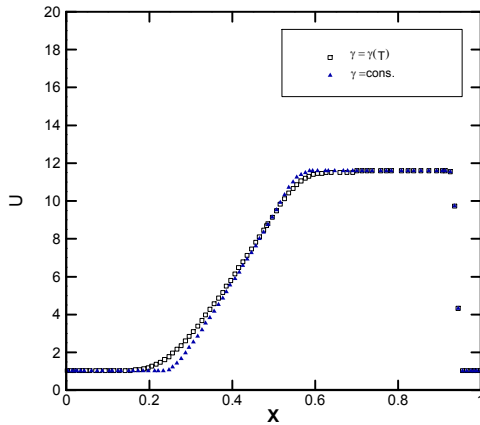
الف



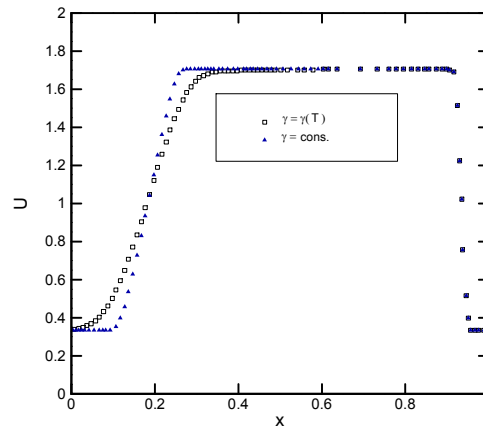
ب



الف

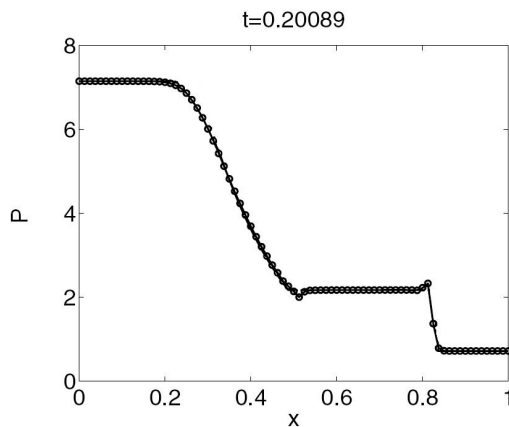


ب

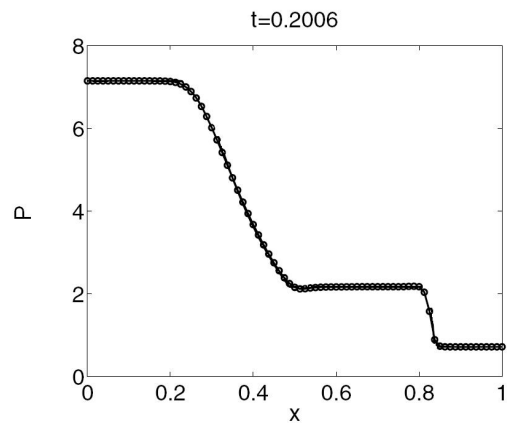


الف

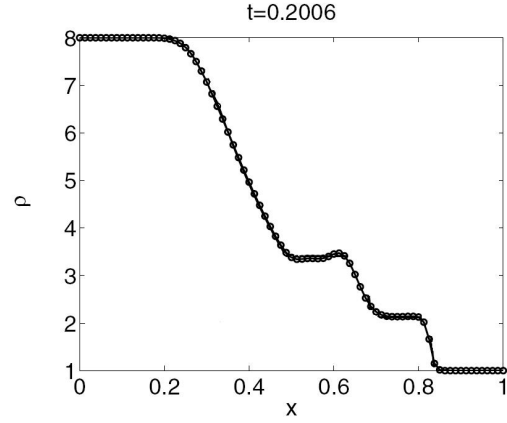
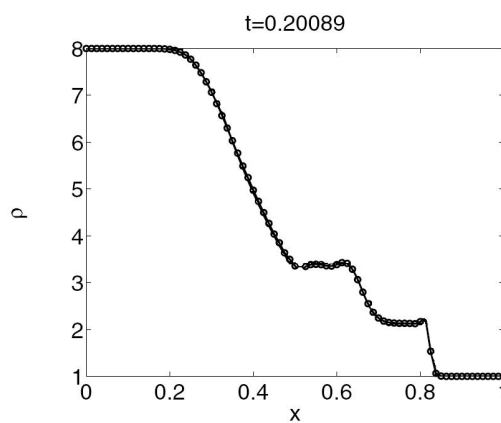
شکل ۳ - تغییرات فشار، چگالی و سرعت به صورت بدون بعد بر حسب طول لوله ی ضربه ی بدون بعد در هر دو حالت ضریب آمیسیته ثابت و متغییر با دما در شرایط الف) زیر صوت و ب) مافوق صوت - مخلوط پیش آمیخته اکسیژن و هیدروژن در زمان بی بعد $t = 0.2$.

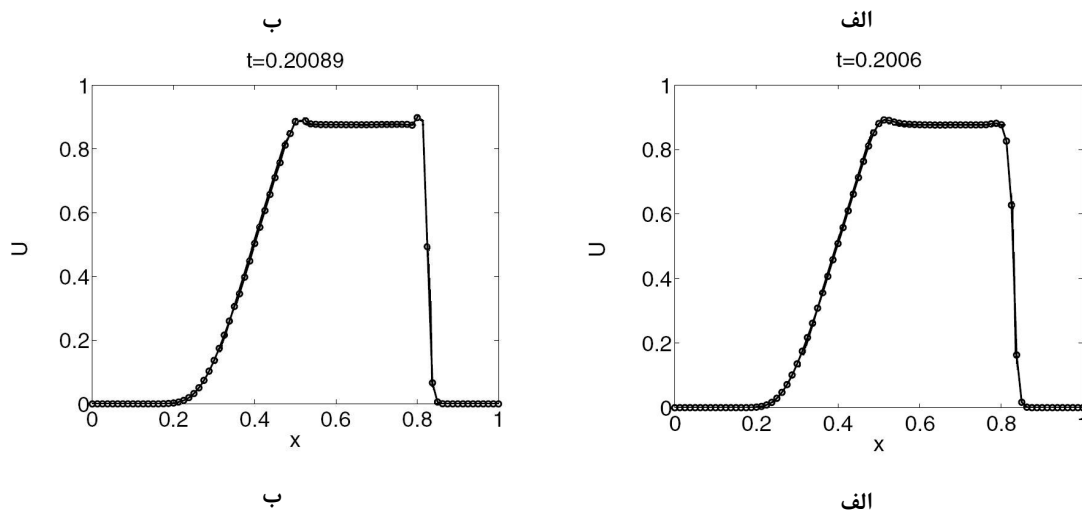


ب



الف





شکل ۴- تاثیر پارامتر زمانی بدون بعد بر روی کمیت های فشار، چگالی و سرعت بر حسب طول لوله ی بی بعد در شرایط زیر صوت برای حالت های الف) $t = 0.2006$ و ب) $t = 0.20089$ برای مخلوط پیش آمیخته ی اکسیژن و هیدروژن.

طول تغییرات خواص نسبت به طول لوله ی بی بعد، در شرایط زیر صوت و مافوق صوت نیز با یکدیگر متفاوت می باشد. عمده تغییرات کمیت های فشار، چگالی و سرعت در حالت بدون بعد در محدوده ی فن انبساطی، در بازه ی $0.1 < x < 0.4$ رخ می دهد. این درحالی است که برای شرایط مافوق صوت، بازه ی تغییرات به $0.2 < x < 0.7$ ، تغییر می یابد. این امر بیانگر این مطلب است که با مافوق صوت شدن جریان، تغییرات خواص با سرعت و شدت بیشتری در طول بازه حرکت می کنند. شایان ذکر است که به دلیل عدم حضور پارامتر تاثیر گذار در ناحیه ی موج ضربه ای، میزان تغییرات خواص در هر یک از دو حالت زیر صوت و مافوق صوت به ازای تغییرات $\gamma(T)$ و همچنین γ ثابت، بر هم منطبق می باشند. بررسی چگونگی تغییرات پارامترهای بی بعد به ازای تغییرات ضریب اتمیسته با دما، در هر دو حالت جریان زیر صوت و مافوق صوت، از موارد با اهمیت به شمار می رود. در حالت جریان زیر صوت، ملاحظه می شود که شیب تغییرات کلیه خواص در حالت $\gamma(T)$ نسبت به γ ثابت، به طور مساوی در دو طرف پهنای ناحیه ی فن انبساطی، به وجود می آید؛ این در حالیست که برای جریان مافوق صوت، این میزان تغییرات، به صورت مجانبی بوده و با نفوذ به ناحیه ی فن انبساطی، افزایش می یابد.

در شکل ۴، تاثیر پارامتر زمانی بدون بعد بر روی کمیت های فشار، چگالی و سرعت بر حسب طول لوله ی بی بعد در شرایط زیر صوت برای مخلوط گازی مفروض، قابل مشاهده می باشد. میزان اختلاف زمانی بدون بعد، $\Delta t = 0.0029$ می باشد. قبل از هر چیز، انتظار می رود که با گذر نسبی زمان، تغییرات به میزان کمی، پیشروی داشته باشند. همانطور که ملاحظه می شود، تغییرات به طور نسبی خود را در نواحی ناپیوستگی نشان می دهند که میزان این تغییرات عمدتاً متوجه ناحیه ی موج ضربه ای می باشد. همچنین ملاحظه می شود که به میزان بسیار کمی پرش، در ناحیه ی پشت موج ضربه ای به دلیل شدت تغییرات در این ناحیه، قابل مشاهده می باشد.

۵- نتیجه گیری

مسئله ی ریمان در حالت مخلوط پیش آمیخته ی گازهای اکسیژن و هیدروژن مورد بررسی قرار گرفت. در شرایطی که مخلوط را غیر واکنشی (خنثی) فرض کنیم، وابستگی γ به دما، تنها در تغییرات خواص ترمودینامیکی در ناحیه ی فن انبساطی اثر گذار می باشد؛ بدین معنی که این امر، باعث تغییر توزیع دما در محدوده ی فن انبساطی می شود. از آنجا که فرایند انبساط، آیزنتروپیک می باشد، با معلوم بودن مقدار آنتروپی و توزیع دمای داخل فن انبساطی، می توان توزیع مابقی خواص، از جمله دانسیته و فشار را محاسبه نمود. بنابراین به علت وابستگی γ به دما، توزیع دما نسبت به حالت γ ثابت، متفاوت بوده و این امر منجر به تغییرات نسبی در توزیع سرعت، فشار و دانسیته نسبت به حالت γ ثابت، می شود. همچنین با تغییر ترم زمانی در مسئله، رفتار جوابها در نقاط ناپیوستگی، به سمت حالت پرش نقطه ای پیش می رود.

مراجع

- 1- C. A. Eckett, *Numerical and Analytical Studies of the Dynamics of Gaseous Detonations*, Ph.D. thesis, California Institute of Technology, 2001.
- 2- Deiterding, R, *A parallel adaptive method for simulating shock-induced combustion with detailed chemical kinetics in complex domains*. Computers and Structures, VOL. 87, pp 769–783, 2009.
- 3- Berger M, Colella P. *Local adaptive mesh refinement for shock hydrodynamics*. J Comput Phys 1988;82:64–84.
- 4- Colella, Ph., Woodward, P, *The Piecewise Parabolic Method (PPM) for Gas-Dynamical Simulations*. J. of Computational Physics, Vol. 54, pp 174–201, 1984.
- 5- S. K. GODUNOV, *Mat. Sb.* 47 271, 1959.
- 6- G.F. Carrier, *Shock waves in a dusty gas*, J. Fluid Mech. 4, 376–382., 1958.
- 7- G. Rudinger, *Some properties of shock relaxation in gas flows carrying small particles*, Phys. Fluids 7, 658–663, 1964.
- 8- J. S, Park, S, W, Baek, *Reacting carbon particle-laden oxygen gas behind a shock wave*, Numerical Heat Transfer, Part A, 47: 269–289, 2005.
- 9- J. S. Park and S. W. Baek, *Interaction of a Moving Shock Wave with a Two-Phase Reacting Medium*, Int. J. Heat Mass Transfer, vol. 46, pp 4717–4732, 2003.
- 10- D.W. Schwendeman, C.W. Wahle, A.K. Kapila, *The Riemann problem and a high-resolution Godunov method for a model of compressible two-phase flow*, J. of Computational Physics, VOL 212, pp 490–526, 2006.
- 11- F. Confortoa, A. Jannellia, R. Monacob, T. Ruggeri, *On the Riemann problem for a system of balance laws modelling a reactive gas mixture*. Physica A, VOL 373, pp 67–87 2007.
- 12- Hirt, C., & Nichols, B., *VOF Method for the dynamics of free boundaries*. Journal of Computational Physics, 39, 201-225, 1979.
- 13- Sethian, J., Mulder, W., & Osher, S., *Computing interface motion in compressible gas dynamics*. Journal of Computational Physics, 100, 209-228, 1992.
- 14- Glimm, J. *Front tracking applied to Rayleigh-Taylor instability*. Physics of Fluids, 10, 1986.
- 15- Saurel, R., & Abgrall, R., *A simple method for compressible multiuid ows*. SIAM Journal of Scientific Computing, 21, 1115-1145, 1999.
- 16- Kee, R. J., F. M. Rupley, and J. A. Miller, *CHEMKIN-II: A Fortran chemical kinetics package for the analysis of gas-phase chemical kinetics*. Technical Report SAND89-8009, Sandia National Laboratories, 1989.