

بررسی تاثیر اتلاف حرارتی به واسطه تشعشع بر روی زمان تاخیر احتراق تک ذره کرووی آلومینیوم

مهدی بید آبادی^۱، آرش جبرئیلی^{*۲}

دانشگاه علم و صنعت ایران، دانشکده مکانیک، آزمایشگاه تحقیقاتی سوخت و احتراق

Arash_jebreyli@yahoo.com

چکیده

در کار پیش رو گرمایش یک تک ذره آلومینیومی تا رسیدن به دمای احتراق مورد بررسی قرار گرفته است. گرمایش ذره توسط تابش لیزر به سطح آن و در شرایط تعلیق ذره توسط نیروهای الکترومغناطیسی در محیط اکسیدگر انجام می شود. در تحلیل حاضر فرض بر این است که در هر لحظه در سراسر ذره دمای یکنواختی وجود داشته باشد. بعلاوه با توجه به نتایج و مشاهدات آزمایشگاهی، ذره طی گرمایش ذوب شده و بنابراین زمان تاخیر احتراق ذره که در دمایی در حدود دمای ذوب اکسید آلومینیوم اتفاق می افتد، به سه بازه زمانی برای تحلیل تقسیم بندی می گردد: ۱- افزایش دمای ذره جامد تا دمای ذوب آلومینیوم t_s ۲- ذوب شدن ذره آلومینیومی t_m ۳- افزایش دمای آلومینیوم مذاب از دمای ذوب تا دمای احتراق t_1 . در این شرایط تاثیرات اتلاف حرارتی تشعشعی بر روی زمان تاخیر احتراق ذره، در هر یک از این مراحل، با بهره گیری از روش هموتویی اغتشاشات (Homotopy Perturbation Method) ضمن مقایسه با مدل قبلی، مورد بررسی قرار گرفته است و در انتها اثر قطر ذره بر روی زمان تاخیر احتراق مورد تحلیل و بحث واقع شده است.

واژه‌های کلیدی: زمان تاخیر احتراق- روش هموتویی اغتشاشات- تک ذره آلومینیوم.

۱- مقدمه

اصولاً برای احتراق یک تک ذره ابتدا آنرا توسط تابش یک باریکه لیزر تا دمای احتراق گرم کرده و بلافاصله پس از شروع فرآیند احتراق تابش را متوقف می کنند بنابراین زمان سوزش تک ذره را می توان به دو مرحله تقسیم بندی کرد:

۱- زمان لازم برای افزایش دمای ذره تا دمای احتراق.

۲- زمان لازم برای احتراق کامل ذره از لحظه شروع احتراق.

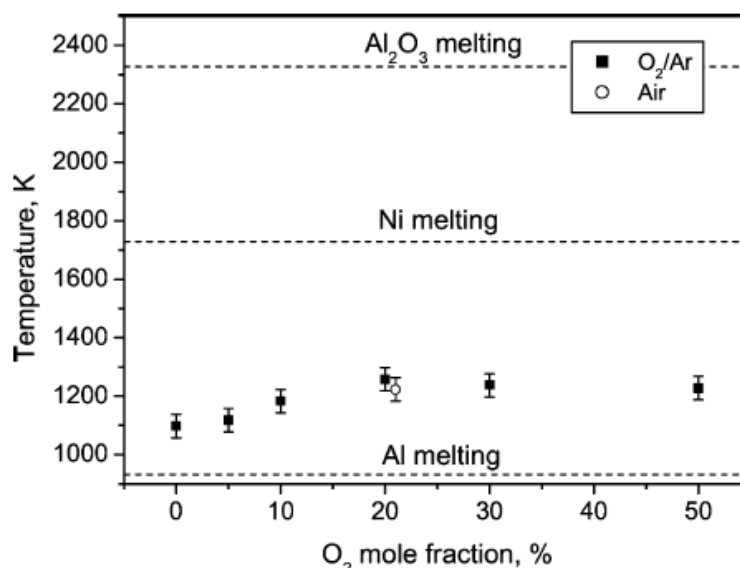
مرحله اول به شدت به عوامل خارجی مانند شدت تابش لیزر، ضریب جذب ذره و دمای اولیه بستگی دارد. بنابراین محققان عموماً در محاسبه زمان سوزش ذرات این مرحله را لحاظ نمی کنند و ثابت زمانی سوزش تک ذره را زمان لازم برای احتراق کامل تک ذره از لحظه شروع احتراق در نظر می گیرند [۵-۱۱]. در واقع تعریف اخیر در محاسبه پارامترهای احتراقی ابر ذرات نیز مورد استفاده قرار می گیرد و از این زمان برای محاسبه نرخ واکنش و ترم تولید انرژی در معادلات بقا استفاده می

۱- دانشیار- دانشگاه علم و صنعت ایران- دانشکده مکانیک- آزمایشگاه تحقیقاتی سوخت و احتراق

۲- کارشناس ارشد- دانشگاه علم و صنعت ایران- دانشکده مکانیک- آزمایشگاه تحقیقاتی سوخت و احتراق

شود [۵-۱]. بنابراین کارهای انجام شده برای محاسبه زمان تأخیر احتراق تک ذره بسیار محدود و عموماً به صورت تجربی بوده است [۱۱-۶].

شافیروویچ (Shafirovich) و همکارانش [۱۱] احتراق تک ذره کروی آلومینیوم را در هوا، دی اکسید کربن و آرگون مورد مطالعه و آزمایش قرار دادند. طی این آزمایش ذرات کروی آلومینیوم ($36-63\mu\text{m}$) توسط نیروی الکترومغناطیسی در هوا شناور شده و توسط یک باریکه لیزر CO_2 تا دمای احتراق گرمایش می کنند. نتایج بدست آمده نشان داد که زمان تأخیر احتراق در یک چنین گرمایشی در تمام محیط های اکسیدگر نزدیک به هم بوده و مستقل از نوع اکسید کننده است. نتایج بدست آمده توسط شافیروویچ در این خصوص در شکل شماره ۱ نشان داده شده است. همچنین در گزارشات وی به این نکته اشاره شد که احتراق ذرات در دمایی نزدیک به دمای ذوب اکسید آلومینیوم رخ می دهد و بعلاوه این که ایست موقتی افزایش دما، در دمایی نزدیک به دمای ذوب آلومینیوم 933K نشان دهنده ذوب آلومینیوم در حین گرمایش است. اخیراً همان محقق [۶] به بررسی تأخیر زمان سوزش در ذرات آلومینیوم کروی با پوشش نیکل پرداخته که کاهش زمان تأخیر احتراق با افزایش ضخامت لایه پوششی نیکل مشاهده شده است که این کاهش بوسیله افزایش ضریب جذب ذره از لیزر تابشی شده توجیه شده است.



شکل ۱- نمایش عدم وابستگی دمای احتراق ذره به نوع محیط اکسیدگر [۶]

در مدل تحلیلی ارائه شده در کار اخیر [۶]، از تأثیرات اتلاف حرارتی ناشی از انتقال حرارت تشعشعی به محیط چشم پوشی شده است که با توجه به دمای بالای ذره به نظر می رسد این ترم نقش قابل توجهی در محاسبه زمان تأخیر احتراق داشته باشد. در تحلیل انجام گرفته در این مقاله به محاسبه تحلیلی زمان تأخیر احتراق بر پایه مدل ارائه شده توسط شافیروویچ [۶] پرداخته شده است که در آن روش هموتوپی اغتشاشات در حل معادلات بقا برای محاسبه اثر انتقال حرارت تشعشعی از ذره به محیط در حین گرمایش، بهره گیری شده است.

۲- زمان تأخیر احتراق تک ذره آلومینیوم

برای شروع تحلیل، یک ذره کروی آلومینیوم را در نظر بگیرید که در شرایط همدم با محیط قرار دارد، در لحظه شروع، ذره توسط یک باریکه لیزر با انرژی یکنواخت شروع به گرم شدن می کند و این گرمایش ادامه پیدا کرده تا ذره شروع به سوختن کند. از نتایج تجربی می دانیم [۱۱] یک ذره در دمایی نزدیک به دمای ذوب اکسید آلومینیوم 2327k محترق می گردد. بعلاوه ضریب جذب انرژی تابشی از لیزر $50W - CO_2$ که چگالی انرژی آن در شرایطی که به مرکز ذره تابش کند $q = 2/75 \times 10^6$ است، معادل $\alpha = 0.00505$ گزارش شده است [۶].

فرض بر این است که ذره در حین گرمایش ذوب شده و بنابراین می توان زمان تأخیر احتراق را به سه مرحله تقسیم بندی کرد:

۱- افزایش دمای ذره جامد تا دمای ذوب آلومینیوم: t_s

۲- ذوب شدن ذره آلومینیوم: t_m

۳- افزایش دمای آلومینیوم مذاب از دمای ذوب تا دمای احتراق: t_l

در نهایت زمان تأخیر احتراق از جمع زمان این سه مرحله بدست می آید.

$$t_i = t_s + t_m + t_l \quad (1)$$

۳- مدل ریاضی گرمایش تک ذره آلومینیوم

با توجه به فیزیک ارایه شده در قسمت قبل، معادلات بقای انرژی و شرایط اولیه و نهایی برای این سه مرحله به صورت زیر خواهد بود.

طی مرحله اول و سوم:

$$\frac{\rho C_p d}{6} \frac{dT}{dt} = \frac{\alpha q}{2} - h(T - T_\infty) - \varepsilon \sigma (T^4 - T_\infty^4) \quad (2)$$

با شرایط اولیه و نهایی به صورت رو برو:

$$t = 0 \Rightarrow T = T_\infty, \quad t = t_s \Rightarrow T = T_m \quad (3)$$

$$t = t_s + t_m \Rightarrow T = T_m, \quad t = t_i \Rightarrow T = T_i$$

و طی مرحله دوم:

$$\frac{\rho L_f d}{6 t_m} = \frac{\alpha q}{2} - h(T_m - T_\infty) - \varepsilon \sigma (T_m^4 - T_\infty^4) \quad (4)$$

در این معادلات C_p ظرفیت حرارتی ویژه آلومینیوم، L_f گرمای نهان ویژه ذوب، ρ چگالی آلومینیوم، d قطر ذره، α ضریب جذب تشعشعی ذره از لیزر استفاده شده با طول موج مربوطه آن، q چگالی انرژی باریکه لیزر در شرایطی به وسط ذره تابش می کند، T_∞ دمای محیط دور دست ذره، T_m دمای ذوب آلومینیوم، T_i دمای احتراق آلومینیوم و h ضریب انتقال حرارت جابجایی می باشد و به صورت $h = \frac{Nu \lambda}{d}$ تعریف شده است که در آن Nu عدد ناسلت و λ ضریب انتقال حرارتی هدایتی هوا می باشد.

در معادلات ۲ و ۴ از انرژی آزاد شده توسط واکنش شیمیایی و اختلاف چگالی میان فاز جامد و مایع آلومینیوم (12%) صرف نظر شده است. بعلاوه از ضریب انبساطی حجمی آلومینیوم طی گرمایش چشم پوشی شده است و از مدل ظرفیت حرارتی فشرده استفاده شده که دمای یکنواختی را برای ذره طی گرمایش پیشنهاد می کند.

برخی فرضیات فوق به سادگی قابل بررسی می باشند، زمان ثابت حرارتی $\frac{\rho C_p d^2}{\lambda_{AL}}$ که در آن λ_{AL} ضریب انتقال حرارت هدایتی آلومینیوم (209 W/mK) می باشد، برای یک ذره $36 \mu\text{m}$ آلومینیوم معادل $15 \mu\text{s}$ می باشد که در مقایسه با زمان ویژه بدست آمده در محاسبات بسیار کوچک بوده و فرض ظرفیت فشرده حرارتی را توجیه می کند. مشخصات فیزیکی آلومینیوم به صورت زیر گزارش شده است [۱۲]:

$$L_f = 397 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}, C_p = 0.896 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}}, \rho = 2.7 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$$

بعلاوه برای هوا در دمای 1000 K ، $\lambda = 0.00667 \frac{\text{W}}{\text{mK}}$ [۱۳] و سایر پارامترها به صورت زیر در نظر گرفته شده اند:

$$T_m = 033 \text{ K}, T_\infty = 298 \text{ K}, \text{Nu} = 2, d = 36 \mu\text{m}$$

۴- مختصری در مورد روش هموتویی اغتشاشات

روش مورد بحث تلفیقی از روش اغتشاشات سنتی و روش هموتویی برای حل معادلات دیفرانسیل غیر خطی می باشد که به طور همزمان مزایای هر دو روش را در تامین میکند. در این روش بر خلاف روش اغتشاشات سنتی برای بسط جواب معادله الزامات نیازمند وجود پارامتر کوچک ε در معادله نمی باشیم و در آن طبق روش هموتویی پارامتر $P \in [0, 1]$ به صورت مجازی وارد پروسه حل شده و به حل معادلات کمک می کند. در زیر به این روش که بدلیل نداشتن محدودیتهای روش هموتویی و روش اغتشاشات سنتی، اخیراً به شدت مورد توجه محققین قرار گرفته است، مختصراً شرح داده شده است.

برای بیان این روش تابع زیر را در نظر بگیرید:

$$A(u) - f(r) = 0 \quad (5)$$

با شرایط مرزی که به صورت زیر می باشد:

$$B\left(u, \frac{\partial u}{\partial n}\right) = 0 \quad (6)$$

که در آن

$$A(u) = L(u) + N(u) \quad (7)$$

ساختار هموتویی اغتشاشات به صورت زیر نشان داده می شود

$$H(r, p) = L(v) - L(u_0) + pL(u_0) + p[N(v) - f(r)] = 0 \quad (8)$$

که در آن

$$v(r, p) : \Omega \times [0, 1] \rightarrow R \quad (9)$$

بدیهی است با در نظر گرفتن معادله (۸) خواهیم داشت.

$$H(v, 0) = L(v) - L(u_0) = 0, \quad H(v, 1) = A(v) - f(r) = 0 \quad (10)$$

که در آن $P \in [0, 1]$ یک پارامتر اصلاحی و u_0 نخستین تخمین می باشد که شرایط مرزی را ارضا کند. تغییر p از صفر تا یک، $v(1, p)$ را از u_0 تا $u(r)$ تغییر خواهد داد با در نظر گرفتن v به صورت روبرو:

$$v = v_0 + pv_1 + p^2v_2 + \dots \quad (11)$$

بهترین تخمین برای جواب معادله به صورت زیر خواهد بود [۱۴-۱۷]:

$$u = \lim_{p \rightarrow 1} v = v_0 + v_1 + v_2 + \dots \quad (12)$$

۵- حل معادلات بقای انرژی در فرایند گرمایش

معادله یک را با شرایط مرزی مربوطه که در بخش قبل آورده شده است را در نظر بگیرید. برای ساده سازی مسئله پارامترهای بدون بعد زیر را تعریف می کنیم:

$$Q = \frac{\alpha q}{2hT_\infty}, \quad \varepsilon = \frac{E\sigma T_\infty^3}{h}, \quad \theta = \frac{T}{T_\infty}, \quad \tau = \frac{t}{\rho VC / hA}, \quad (13)$$

پس از اعمال تغییر متغیرها در معادلات در نهایت معادله انتقال حرارت بدون بعد زیر حاصل می شود:

$$\left[\frac{d\theta}{d\tau} + \theta + \varepsilon\theta^4 \right] - [Q + \varepsilon + 1] = 0 \quad (14)$$

با در نظر گرفتن فرم استاندارد معادله در روش هموتویی اغتشاشات خواهیم داشت:

$$L(v) = \frac{dv}{d\tau} + v, \quad L(\theta_0) = \frac{d\theta_0}{d\tau} + \theta_0, \quad N(v) = \varepsilon v^4, \quad f(r) = Q + \varepsilon + 1 \quad (15)$$

با جاگذاری v از معادله ۱۱ در معادله ۸ بعد از جایگذاری و ساده سازی نهایتاً معادله اصلی هموتویی اغتشاشات برای محاسبه θ به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned} \frac{dv_0}{d\tau} + v_0 - \frac{d\theta_0}{d\tau} - \theta_0 + p\theta_0(\tau) + pv_1(\tau) + p(Q + \varepsilon + 1) + p \frac{d}{d\tau} \theta_0(\tau) + \\ p \frac{d}{d\tau} v_1(\tau) + p\varepsilon\theta_0(\tau)^4 + p^2\varepsilon\theta_0(\tau)^3v_1(\tau) + p^2v_2(\tau) + p^2 \frac{d}{d\tau} v_2(\tau) = 0 \end{aligned} \quad (16)$$

که در آن فرض شده است که:

$$p^3 = p^4 = \dots = 0 \quad (17)$$

بعد از بازنویسی و جدا سازی معادله بر پایه توانهای پارامتر p خواهیم داشت:

$$p^0: \quad \frac{dv_0}{d\tau} + v_0 - \frac{d\theta_0}{d\tau} - \theta_0 = 0 \quad (18)$$

$$p^1: \quad v_0(\tau) + v_1(\tau) + (Q + \varepsilon + 1) + \frac{d}{d\tau} v_0(\tau) + \frac{d}{d\tau} v_1(\tau) + \varepsilon v_0(\tau)^4 = 0, \quad v_1(\tau = 0) = 0$$

$$p^2: \quad \varepsilon v_0(\tau)^3 v_1(\tau) + v_2(\tau) + \frac{d}{d\tau} v_2(\tau) = 0, \quad v_2(\tau = 0) = 0$$

برای حل سری معادلات ۱۸ نیازمند حدس اولیه برای θ_0 می باشیم که بایست با در نظر گرفتن تخمینی از رفتار θ طی فرآیند و ارضا شدن شرایط مرزی و اولیه انتخاب شود، بدین منظور برای θ_0 در مرحله اول گرمایش، از حل معادله دیفرانسیل بقای انرژی در شرایطی که از ترم تشعشعی صرف نظر شود استفاده می کنیم که خواهیم داشت:

$$\theta_0(\tau) = (Q + \varepsilon + 1)(1 - e^{-\tau}) + e^{-\tau} \quad (19)$$

با جایگذاری θ_0 و حل سری معادلات ۱۸ مراتب صفر تا دو v بدست می آیند که به دلیل حجم بالای معادله در اینجا از بازنویسی آن خودداری میشود. در نهایت با میل دادن p به سمت ۱، v به سمت θ میل خواهد نمود که در این صورت خواهیم داشت:

$$\theta = v_0 + v_1 + v_2 \quad (20)$$

برای مرحله سوم گرمایش طبق شرایط مرزی نشان داده شده در معادله و لحاظ کردن حدس اولیه به صورت معادله زیر، مشابه مرحله اول گرمایش معادله ای برای دمای بدون بعد بدست می آید که آن هم به دلیل حجیم بودن در اینجا آورده نمی شود.

$$\theta_0(\tau) = (Q + \varepsilon + 1) + e^{-\tau}(4.1309 - Q + \varepsilon) \quad (21)$$

زمان لازم برای ذوب شدن آلومینیوم جامد t_m که در مرحله دوم گرمایش رخ می دهد، برای هر ذره با قطر مشخص از حل معادله جبری زیر به سادگی قابل محاسبه است.

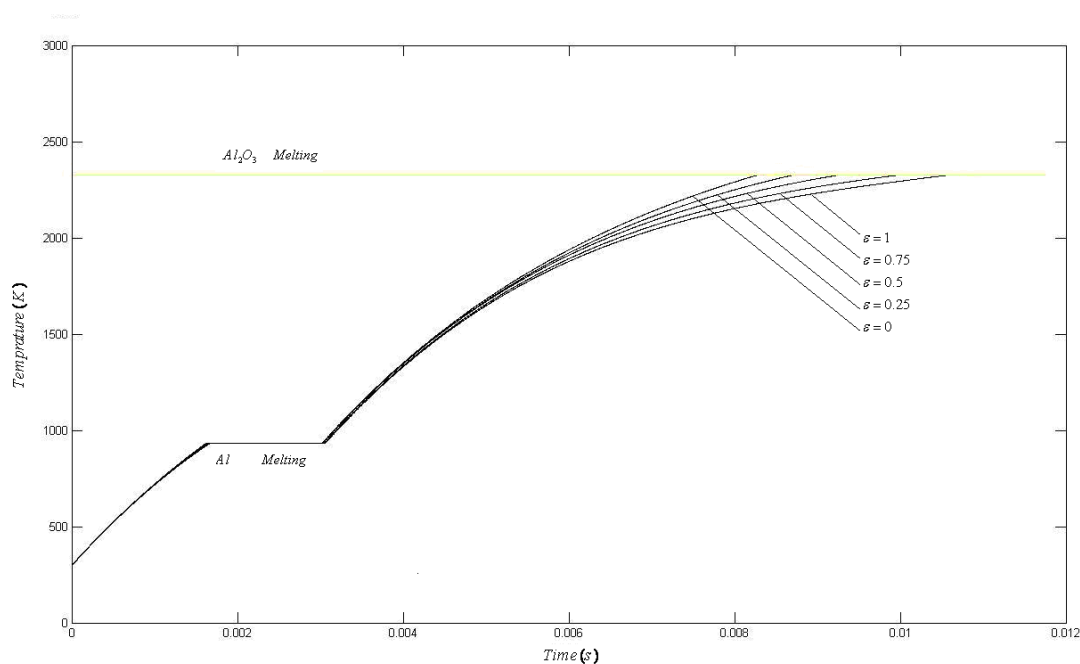
$$t_m = \frac{\rho L_f d}{6 \left[\frac{\alpha q}{2} - h(T_m - T_\infty) - \varepsilon \sigma (T_m^4 - T_\infty^4) \right]} \quad (22)$$

۶- بحث و نتیجه گیری

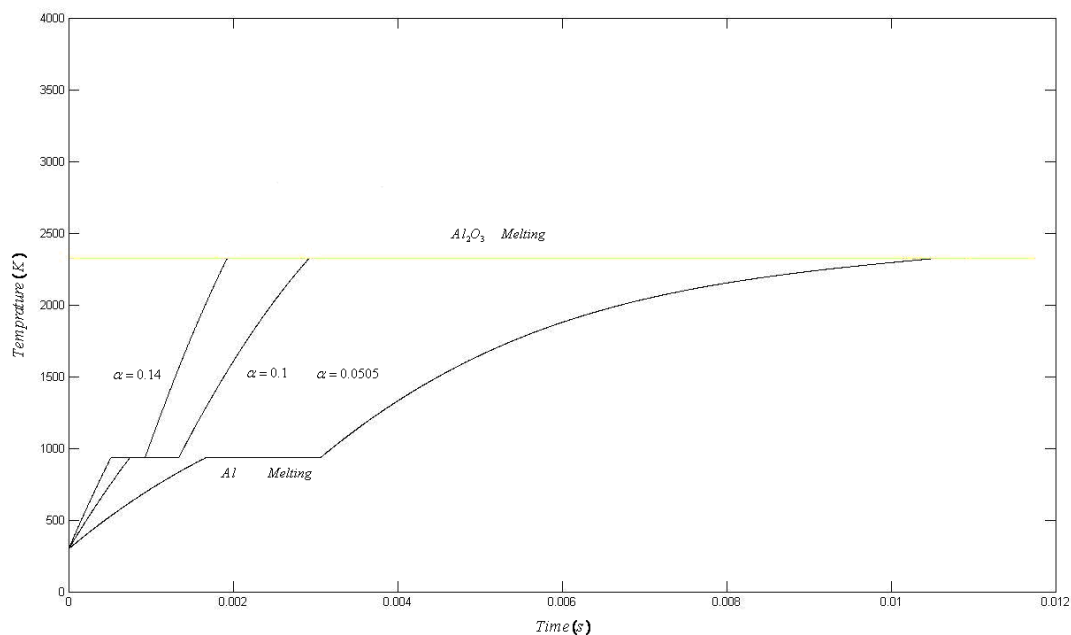
در شکل ۲ اثر اتلاف حرارتی ناشی از تشعشع طی فرایند گرمایش برای ذره آلومینیوم با قطر 36 میکرون و ضریب جذب انرژی تابشی معادل 0.0505 به ازاا مقادیر مختلف ضریب پخش انرژی تابشی نشان داده شده است. همانطور که مشاهده می شود با افزایش ضریب پخش تشعشعی زمان تاخیر احتراق ذره افزایش می یابد، این تاثیر در مرحله نخست گرمایش و همینطور مرحله دوم، ناچیز بوده ولی بدلیل افزایش اختلاف دمای ذره و محیط در مرحله سوم گرمایش اثر اتلاف حرارت تشعشعی بطور نمایی افزایش پیدا کرده و در نهایت برای ذره مفروض تاثیر 28 درصدی اتلاف حرارت تشعشعی بر روی زمان تاخیر احتراق پیش بینی می شود که مقدار غیر قابل اغماضی می باشد.

اثر ضریب جذب انرژی تابشی ذره بر روی زمان تاخیر احتراق ذره در شکل ۳ نشان داده شده است که همانطور که مشاهده می شود، با افزایش ضریب جذب انرژی تشعشعی که در واقع توسط پوشش سطحی ذره توسط فلز نیکل انجام می شود، زمان تاخیر احتراق به شدت کاهش پیدا می کند. بعلاوه از مقایسه شکل ۳ با نتایج ارائه شده توسط شافیروویچ [۶] کاهش درصد اثر تشعشع بر روی زمان تاخیر احتراق با افزایش ضریب جذب انرژی تابشی، به وضوح قابل نتیجه گیری می باشد. شکل ۴ پیش بینی مدل ارائه شده را برای زمان تاخیر احتراق برای ذرات با قطر متفاوت و برای $\alpha = 0.0505$ و $\varepsilon = 1$ نشان داده است. نکته قابل بحث در این شکل تاثیر پذیری اتلاف حرارتی جابجایی به واسطه وابستگی ضریب انتقال حرارت جابجایی h به قطر ذره می باشد، همانطور که مشاهده می شود برای ذرات با قطر کوچک، بدلیل افزایش ترم اتلاف جابجایی در واحد سطح با افزایش دما، نمودار رشد دما به سرعت مستهلک شده به طوری که برای ذرات کوچکتر از 30 میکرون با مقادیر اولیه ارائه شده در مسئله، دمای نهایی ذره توسط تابش یک چنین لیزری عملاً هرگز به دمای احتراق نمی رسد.

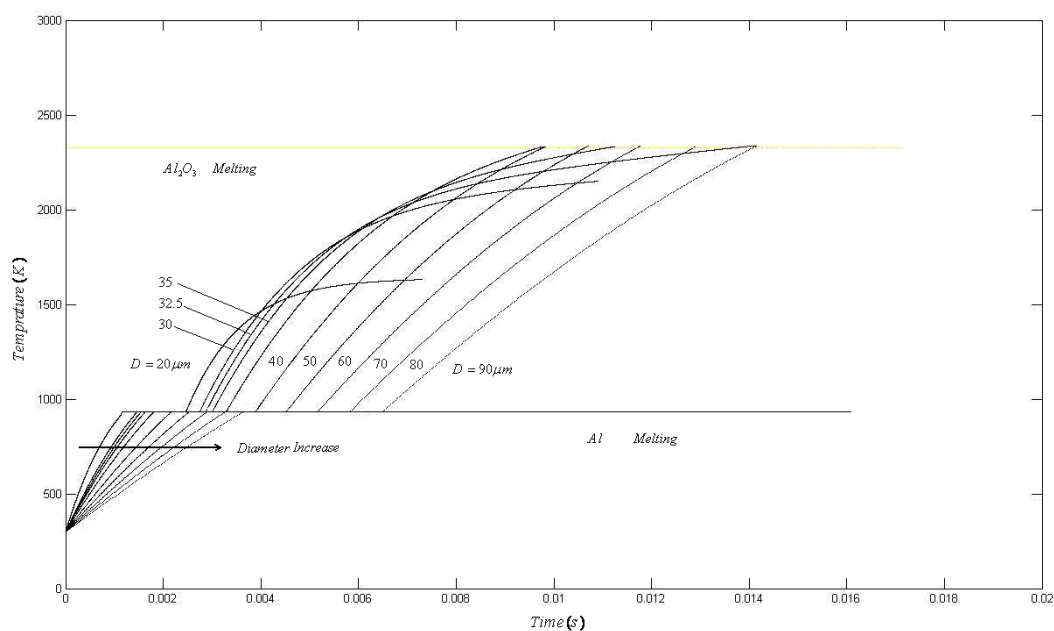
این تاثیر پذیری نمودار رشد دما، در این رنج دمایی، برای ذرات کوچکتر از ۵۰ میکرون به شدت خودنمایی کرده و برای این ذرات تاخیر احتراق با افزایش قطر ذره کاهش می یابد ولی برای ذرات بزرگتر به طوری که در شکل مشاهده می شود با افزایش قطر ذره زمان تاخیر احتراق نیز افزایش می یابد. شکل ۵ پیش بینی زمان تاخیر احتراق ذره بر حسب قطر، برای قطرهای مختلف ذرات می باشد که نتیجه ذکر شده در شرح شکل شماره ۴ را به روشنی نشان میدهد.



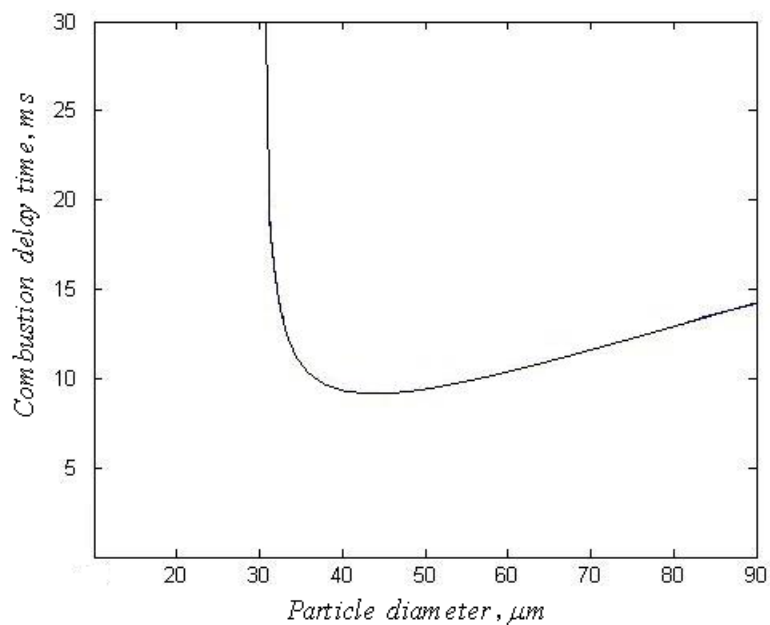
شکل ۲- اثر برای ذره آلومینیوم با قطر 36 میکرون اتلاف حرارتی ناشی از تشعشع طی فرایند گرمایش



شکل ۳- اثر ضریب جذب انرژی تابشی ذره بر روی زمان تاخیر احتراق ذره برای ذره با قطر 36 میکرون



شکل ۴- پیش بینی مدل ارائه شده را برای زمان تاخیر احتراق برای ذرات با قطر متفاوت



شکل ۵- پیش بینی زمان تاخیر احتراق ذره بر حسب قطر

مراجع

- 1- M. Bidabadi, N. Moallemi, A. Armin I. Shafieenejad The Investigation of Flame Speed and Temperature in Flames of Aluminum Micro and Nano-Particle Clouds International Review of Mechanical Engineering (I.R.E.M.E.), Vol. 2, n.3 pp 401-407



FCCI2010-1174

سومین کنفرانس سوخت و احتراق ایران

تهران - دانشگاه صنعتی امیرکبیر - اسفند ماه ۱۳۸۸



دانشگاه صنعتی امیرکبیر
دانشکده مهندسی هوافضا

- 2- M. Bidabadi, M. Sediqhi, The Investigation of a Particle Size Effect on the Burning Velocity of Laminar Flame of Aluminum, International Journal of engineering science, Vol. 13, n. 3, 2002 pp 133-145.
- 3- Frand- kamenntskii, diffusion and heat transfer in chemical kinetics, plenum prdss, New York, 1969.
- 4- Y. Huang, G.A.Risha, V. Yang and Richard A. Yetter, Combustion of Bimdal Nano/Micro-Sized Aluminum Particle Dust in Air, The Pennsylvania State University, University Park, PA 16802, USA.
- 5- Y. Shoshin, and E. Dreizin. Particle combustion rates for mechanically alloyed Al-Ti and aluminum powders burning in air. Combustion. Flame, vol 145, 2006 pp 714- 722.
- 6- E. Shafirovicha, P. Escot Bocanegraa, C. Chauveaua, I. Go`kalpa U. Goldshlegerb, V. Rosenbandc, A. Gany Ignition of single nickel-coated aluminum
- 7- A.L. Breiter, V.M. Mal_tsev, E.I. Popov, Combust. Explos. Shock Waves 26 (1988) 86-92
- 8- V.A. Babuk, V.A. Vassiliev, V.V. Sviridov, Combust. Sci. Technol. 163 (2001) 261-289.
- 9- D.A. Yagodnikov, A.V. Voronetskii, Combust. Explos. Shock Waves 33 (1997) 49-55.
- 10- A. Varma, A.S. Mukasyan, in: A. Borisov, L. DeLuca, A. Merzhanov (Eds.), Self-Propagating High-Temperature Synthesis Materials, Taylor & Francis, New York, 2002, p. 1.
- 11- E. Shafirovich, A. Mukasyan, L. Thiers, A. Varma, B. Legrand, C. Chauveau, I. Go` kalp, Combust. Sci. Technol. 174 (2002) 125-140.
- 12- H. Kuchling, Physik. VEB Fachbuchverlag, Leipzig, 1980.
- 13- N.B. Vargaftik, Tables on the Thermophysical Properties of Liquids and Gases. Hemisphere, Washington, London, 1975.
- 14- J.H. He, Homotopy perturbation technique, J. Comput. Math. Appl Mech Eng. 17 (8) (1999) 257-262.
- 15- J.H. He, A coupling method of homotopy technique and perturbation technique for nonlinear problems, Int. J. Non-Linear Mech. 351 (2000) 37-43
- 16- D.D. Ganji, A. Rajabi Assessment of homotopy-perturbation and perturbation methods in heat radiation equations
- 17- R. Bellman, Perturbation Techniques in Mathematics, Physics and Engineering, Holt, Rinehart & Winston, New York, 1964