

## بررسی انبساط ناگهانی تراک گازی با استفاده از تعقیب جبهه شاک به روش

### Level set

امیرمنصوری<sup>۱</sup>، کیومرث مظاهری<sup>۲\*</sup>

دانشگاه تربیت مدرس - بخش مکانیک - گروه تبدیل انرژی - آزمایشگاه دینامیک گاز

(\* [Kiumars@modares.ac.ir](mailto:Kiumars@modares.ac.ir))

### چکیده

بررسی مسئله انبساط ناگهانی تراک<sup>۳</sup> و تعیین قطر بحرانی سالها مورد توجه محققین بوده است. علی‌رغم تمام تلاش‌هایی که در این زمینه صورت گرفته است، هنوز تئوری جامعی برای محاسبه دقیق قطر بحرانی وجود ندارد. از آنجا که روش‌های تجربی و شبیه‌سازی‌های کامل عددی برای تعیین قطر بحرانی هزینه بالایی دارند، لزوم تحقیق در زمینه روش‌هایی با هزینه محاسباتی کمتر احساس می‌شود. در کار حاضر امکان بررسی مسئله انبساط ناگهانی تراک و تعیین قطر بحرانی با استفاده از رابطه D-K حاصل از تئوری<sup>۴</sup> DSD و الگوریتم تعقیب جبهه تراک به نام Level set مورد بررسی قرار گرفته است. علی‌رغم جواب‌های نسبتاً دقیقی که این روش در تعیین محل جبهه تراک به دست می‌دهد، در محاسبه قطر بحرانی در تراک گازی پاسخ‌ها همخوانی خوبی با نتایج تجربی ندارند. علت این امر می‌تواند، حضور پدیده‌های ناپایا باشد که در این روش مدل نمی‌شوند. این روش تنها به انحنای جبهه تراک وابسته است و جملات دیگری همچون ناپایایی، که در این مسئله سهم بیشتری نسبت به انحنای تراک دارند را در نظر نمی‌گیرد.

واژه‌های کلیدی: تراک گازی - انبساط ناگهانی - قطر بحرانی - Level set

### ۱- مقدمه

تراک گازی یک موج احتراقی است که با سرعت مافوق صوت حرکت می‌کند. این موج احتراقی با استفاده از انرژی آزاد شده ناشی از احتراق در ناحیه واکنش، تقویت شده و به حرکت خود ادامه می‌دهد. یکی از مسائلی که سالها مورد توجه محققین بوده است، بررسی تراک هنگام عبور از تغییر سطح مقطع ناگهانی می‌باشد. زمانی که جبهه تراک از یک لوله به محیط باز وارد می‌شود، شکل (۱)، از محل گوشه یک موج انبساطی وارد میدان جریان می‌شود. این موج انبساطی باعث می‌شود تا موج تراک که در لوله به صورت تخت منتشر می‌شود، در محیط باز به صورت خمیده درآید. این انحنای باعث کاهش دما و فشار سیال پشت جبهه تراک می‌شود و ممکن است منجر به جدایی ناحیه واکنش از جبهه تراک و خاموشی آن گردد. پس از عبور تراک از یک لوله به محیط باز ممکن است یکی از رژیم‌های فوق بحرانی<sup>۵</sup> یا زیر بحرانی<sup>۶</sup> رخ دهد که به قطر لوله، شرایط ترمودینامیکی مواد اولیه و نوع مخلوط قابل احتراق بستگی دارد [۱]. در رژیم فوق بحرانی، نرخ انرژی آزاد شده می‌تواند بر اثرات ناشی از امواج انبساطی غلبه کند و جبهه تراک در محیط آزاد نیز منتشر شده و خاموش نشود. در رژیم زیر بحرانی، اثر امواج انبساطی بیشتر از نرخ انرژی آزاد شده می‌باشد و در نتیجه ناحیه واکنش از جبهه تراک جدا می‌شود و تراک خاموش می‌گردد [۱]. شرایط بحرانی نیز نشان‌دهنده مرز بین این دو حالت می‌باشد.

۱- دانشجوی کارشناسی ارشد مهندسی مکانیک، دانشگاه تربیت مدرس

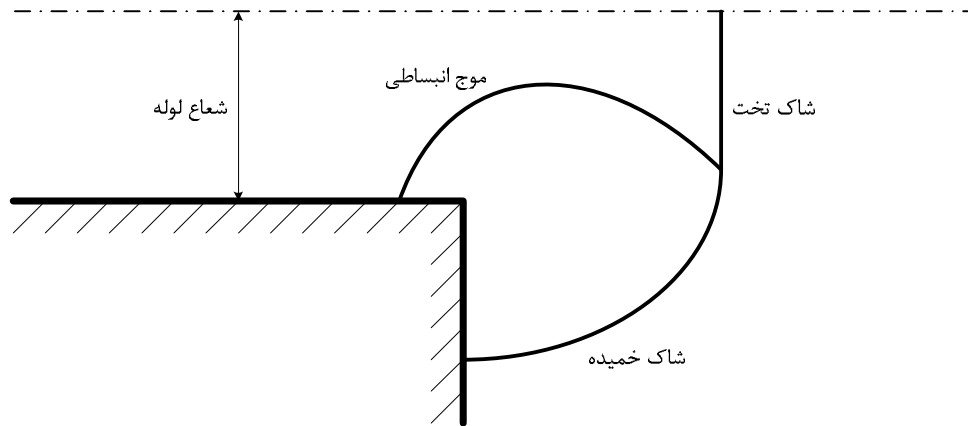
۲- دانشیار دانشگاه تربیت مدرس

<sup>3</sup> Detonation

<sup>4</sup> Detonation shock dynamics

<sup>5</sup> Super critical

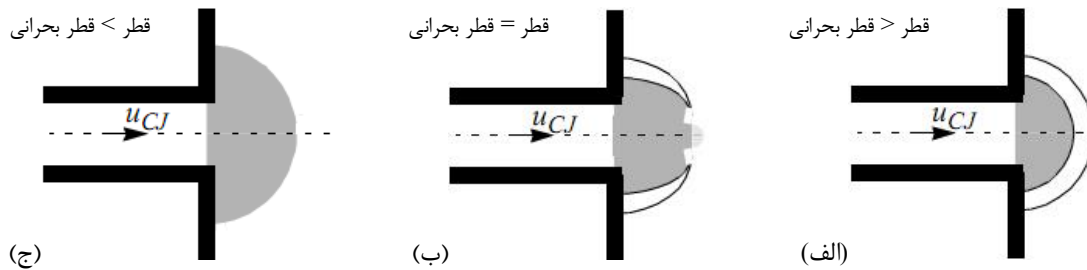
<sup>6</sup> Sub critical



شکل ۱: عبور تراک از یک لوله به محیط باز

در شرایط بحرانی به صورت موضعی، ناحیه واکنش از جبهه تراک جدا می‌شود و تراک خاموش می‌شود، ولی آغازش مجدد از نقاطی که هنوز اثر امواج انبساطی را درک نکرده‌اند شروع می‌شود و باعث می‌شود تراک بتواند به انتشار خود در محیط باز ادامه دهد [۱].

قطر بحرانی، کوچکترین قطری است که تراک تخت می‌تواند از یک لوله به یک محیط باز وارد شود و در محیط باز به صورت یک تراک کروی منتشر شده و خاموش نگردد [۲]. اگر قطر لوله بزرگ‌تر از قطر بحرانی باشد، رژیم فوق بحرانی رخ می‌دهد و جبهه تراک در محیط باز نیز به حرکت خود ادامه می‌دهد. اگر قطر لوله کوچک‌تر از قطر بحرانی باشد، رژیم زیر بحرانی رخ می‌دهد و تراک در محیط باز خاموش می‌شود. (شکل ۲)



شکل ۲ الف- رژیم زیر بحرانی (جبهه تراک و ناحیه واکنش کاملاً جدا می‌شوند). ب- شرایط بحرانی (پس از خاموشی موضعی آغازش مجدد از محل تقارن لوله رخ می‌دهد). ج- رژیم فوق بحرانی (جبهه تراک و ناحیه واکنش کاملاً پیوسته باقی می‌مانند).

در سال ۱۹۵۶، زلدویچ<sup>۱</sup> و همکارانش توانستند به وسیله عکس‌های تجربی نشان‌دهنده پس از عبور تراک از لوله به محیط باز تحت شرایطی تراک به شعله تبدیل می‌شود و تحت شرایط دیگری تراک به انتشار خود ادامه می‌دهد [۳]. این نخستین بار بود که رژیم‌های زیربحرانی و فوق بحرانی مشاهده شد. پس از آن در سال ۱۹۶۵ میتروفانوف و سولوخین<sup>۲</sup> [۴] با توجه به عکس‌های سایه نگاری<sup>۳</sup> که برای تشخیص رژیم‌های زیربحرانی و فوق بحرانی تهیه کرده بودند، متوجه شدند که در

<sup>1</sup> Zeldovich

<sup>2</sup> Mitrofanov and Solukhin

<sup>3</sup> Schlieren



رژیم زیربحرانی، ساختار سلولی تراک به طور کامل ناپدید می‌شود. سولوخین و راگلند<sup>۱</sup> [۵] در سال ۱۹۶۹ با توجه به عکس‌های تجربی دیگری بیان کردند که در رژیم زیر بحرانی جبهه تراک کاملاً از ناحیه واکنش جدا می‌شود و در رژیم فوق بحرانی در برخی از نقاطی که جبهه تراک از ناحیه واکنش جدا می‌شود، آغازش مجدد صورت می‌گیرد. لی و موری<sup>۲</sup> [۶] با توجه به نتایجی که از صفحه دوداندود به دست آوردند، دو مکانیزم برای این آغازش مجدد ذکر کردند. نخستین مکانیزم زمانی رخ می‌دهد، که موج انبساطی به نزدیکی محور لوله می‌رسد و در محور که هنوز جبهه به صورت تخت است، آغازش مجدد صورت می‌گیرد. دومین مکانیزم زمانی رخ می‌دهد، که امواج شاک به دیواره برخورد می‌کنند و به سمت جبهه تراک منعکس می‌شوند. در شبیه سازی عددی با معادلات اویلر واکنشی و سینتیک شیمیایی دو مرحله‌ای که در سال ۱۹۹۶ توسط پنتو<sup>۳</sup> و همکارانش [۷] صورت گرفت، همین دو مکانیزم بیان شد. علاوه بر این آن‌ها بیان کردند که آغازش مجددی که در نزدیکی محور صورت می‌گیرد در اثر انتشار امواج عرضی به درون دسته امواج انبساطی است که از محل گوشه دیواره تولید شده‌اند. ولی گاهی امواج عرضی باعث آغازش مجدد نمی‌شوند و فقط باعث تقویت ناحیه واکنشی که از جبهه تراک جدا شده می‌شوند و در نتیجه ناحیه واکنش دوباره به جبهه تراک متصل می‌شود.

تلاش‌های بسیاری در جهت یافتن رابطه‌ای بین طول مشخصه‌های موجود در مسئله انبساط ناگهانی جبهه تراک و قطر بحرانی انجام شده است. به طور مثال در سال ۱۹۶۵ میترونف و سولوخین [۴] دریافتند که، قطر بحرانی حدود ۱۳ برابر اندازه سلول مشخصه<sup>۴</sup> برای مخلوط استوکیومتریک استیلن و اکسیژن حتی با فشارهای اولیه متفاوت است. ادوارد<sup>۵</sup> و همکارانش [۸] در سال ۱۹۸۱ صحت این نسبت را برای مخلوط‌های دارای هیدروژن نشان دادند. نیستیتس<sup>۶</sup> و همکارانش [۹] در سال ۱۹۸۲ صحت این نسبت را برای مخلوط‌های مختلف سوخت و اکسیژن و نیتروژن برای درصدهای متفاوت رقیق‌کننده و فشارهای اولیه مختلف نشان دادند. اما پس از آن محققان دیگری دریافتند که این نسبت برای مخلوط استیلن و هوا بزرگتر از ۱۳ است. معین<sup>۷</sup> و همکارانش [۱۰] در سال ۱۹۸۴ این نسبت را برای مخلوط‌های مختلف هوا و سوخت بین ۱۳ تا ۲۴ بیان کردند. شفرده<sup>۸</sup> [۱۱] در سال ۱۹۸۶ و محققان دیگری، این نسبت را با توجه به نوع و درصد رقیق‌کننده در مخلوط بین ۴ تا ۳۰ بیان کردند.

برخی دیگران از محققان قطر بحرانی را به طول ناحیه واکنش یا مدت زمان معادل آن مرتبط ساختند. برخی دیگر از محققین قطر بحرانی را به انرژی لازم برای آغازش تراک مرتبط دانستند. به عنوان مثال لی و متسوی<sup>۹</sup> [۱۲] مقدار کار انجام شده توسط محصولات احتراق که در محیط خارج از لوله منبسط می‌شوند را در حالت بحرانی برابر انرژی لازم برای آغازش تراک قرار دادند. علی رغم نتایج تجربی زیادی که برای قطر بحرانی مخلوط‌های مختلف وجود دارد و نتایج تحلیلی و شبیه‌سازی‌های عددی که در این زمینه انجام شده است، هنوز تئوری جامعی برای محاسبه قطر بحرانی وجود ندارد.

تئوری DSD، رابطه بین انحنا و سرعت جبهه تراک که به رابطه D-κ معروف است را بیان می‌کند. در واقع این رابطه نحوه کاهش سرعت تراک در اثر افزایش انحنای آن را نشان می‌دهد. برای استفاده از این رابطه در مسائل کاربردی به یک الگوریتم تعقیب جبهه تراک نیاز است که مکان و شکل جبهه تراک را در زمان‌های مختلف با توجه به شرایط مرزی مسئله به

<sup>1</sup> Solukhin and Ragland

<sup>2</sup> Lee and Murray

<sup>3</sup> Pantow

<sup>4</sup> Detonation cell width

<sup>5</sup> Edward

<sup>6</sup> Knystautas

<sup>7</sup> Moen

<sup>8</sup> Shepherd

<sup>9</sup> Lee and Metsui



دست آورد. به عنوان مثال لامبرت و استوارت<sup>۱</sup> در مسئله عبور جبهه تراک ماده شدیدالانفجار PBX-9501 از روی یک صفحه به جنس سرب از رابطه  $D-\kappa$  و الگوریتم تعقیب جبهه تراک به نام Level set، برای تعیین محل جبهه تراک استفاده کردند [۱۳]. نتایج به دست آمده همخوانی خوبی با نتایج تجربی داشت. در کار حاضر با کمک رابطه  $D-\kappa$  و الگوریتم Level set، مکان و سرعت جبهه تراک در مسئله عبور جبهه تراک از یک لوله به محیط باز به دست آورده می‌شود و پس از آن با توجه به این نتایج، قطر بحرانی مورد تحلیل قرار می‌گیرد. در واقع در این روش برای سرعت حرکت تابع Level set از رابطه  $D-\kappa$  استفاده می‌شود. در ادامه مختصری به تئوری DSD و سپس روش Level set که برای تعقیب جبهه تراک مورد استفاده قرار می‌گیرد، پرداخته می‌شود. پس از آن نتایج به دست آمده برای تعیین قطر بحرانی حاصل از تعقیب جبهه تراک با نتایج تجربی مقایسه می‌شود.

## ۲- تئوری DSD

در ناحیه واکنش یک مکان هندسی وجود دارد که در آن سرعت حرکت ذرات نسبت به شاک پیشرو برابر سرعت صوت در همان مکان است. جریان در پایین دست این مکان صوتی، نسبت به جبهه تراک مافوق صوت است. لذا تنها قسمتی از ناحیه واکنش بر حرکت جبهه تراک تاثیر خواهد داشت که مابین مکان صوتی و شاک پیشرو قرار داشته باشد. از این رو می‌توان تنها با تحلیل این ناحیه کوچک از ناحیه واکنش، خصوصیات دینامیکی تراک را بدست آورد. با تغییر انحنای جبهه تراک  $\kappa$ ، اندازه ناحیه مابین مکان صوتی و شاک پیشرو تغییر کرده و لذا مقدار انرژی تاثیر گذار بر شاک نیز تغییر می‌نماید. در صورتی که تراک بصورت واگرا منتشر شود ( $\kappa > 0$ )، مکان صوتی در داخل ناحیه واکنش واقع می‌شود. در این حالت بخشی از انرژی تولید شده در ناحیه واکنش به جبهه تراک نمی‌رسد. علاوه بر این با توجه به اینکه خطوط جریان در پشت جبهه به هم نزدیک می‌شوند، نسبت به تراک تخت انرژی کمتری به جبهه خواهد رسید. طول ناحیه واکنش نیز نسبت به تراک تخت بیشتر است. این عوامل باعث می‌شوند که سرعت تراک نسبت به تراک تخت افت کند. به دلیل اثر قابل توجه انحنا بر سرعت تراک، تلاش-های زیادی برای استخراج رابطه‌ای بین دینامیک و انحنای جبهه تراک صورت گرفته است. حاصل این تلاش‌ها معرفی روشی به نام DSD بوده است [۱۴]. در این روش معادلات بقای حاکم در دستگاه چسبیده به جبهه تراک، ساده سازی می‌شوند. سپس با حل معادلات حاصل، در ناحیه واکنش مابین شاک پیشرو و مکان صوتی، روابطی برای تاثیر انحنای جبهه بر دینامیک تراک بدست می‌آید. این روابط به نام روابط  $D-\kappa$  معروفند. از این رابطه که سرعت حرکت جبهه تراک را به انحنای آن مربوط می‌سازد، در الگوریتم تعقیب جبهه تراک استفاده می‌شود. همچنین یاو و استوارت اثر شتاب جبهه تراک  $\dot{D}$  را بر دینامیک تراک بررسی کردند [۱۵] که این رابطه به نام  $\dot{D} - D - \kappa$  شناخته می‌شود. در بخش بعدی به الگوریتم تعقیب جبهه تراک که Level set نام دارد، پرداخته می‌شود.

## ۳- روش Level set

روش Level set یکی از روش‌های با دیدگاه اوپلری است که برای تعقیب ناپیوستگی موجود میان دو سیال، یا یک سیال و جامد به کار می‌رود. این روش در سال ۱۹۸۹ نخستین بار توسط اوشر<sup>۲</sup> مورد استفاده قرار گرفت [۱۶]. پس از آن در مسائل بسیاری مانند حل معادله ناپیر استوکس در جریان دوفازی، تعقیب جبهه شعله و تراک و غیره مورد استفاده قرار گرفته است. برای تعقیب جبهه تراک با استفاده از رابطه بین انحنا و سرعت جبهه تراک، این روش نخستین بار توسط اسلام<sup>۳</sup> مورد استفاده

<sup>1</sup> Lambert and Stewart

<sup>2</sup> Osher

<sup>3</sup> Aslam



قرار گرفت [۱۷] که در ادامه بدان پرداخته می‌شود. در این روش مرز  $\Gamma$  می‌تواند به صورت باز یا بسته در منطقه  $\Omega$  گسترش یابد. هدف محاسبه حرکت مرز  $\Gamma$  تحت میدان سرعت  $U$  است. این میدان سرعت می‌تواند به موقعیت، زمان و هندسه مربوط به مرز و یا فیزیکی خارج از مرز وابسته باشد. مرز در زمان‌های بعدی توسط مقدار صفر تابع Level set تعقیب می‌شود، به عبارت دیگر  $\Gamma(t) = \{ \bar{x} | \psi(\bar{x}, t) = 0 \}$ . در این روش مقادیر تابع در داخل مرز مقداری منفی و در خارج از مرز مقداری مثبت و در روی مرز برابر با صفر است. در این روش، نخست برای کل میدان حل دو بعدی، تابعی ضمنی به صورت  $\psi(x, y, t) = \text{const}$ ، تعریف کنیم. تابع  $\psi(x, y, t) = 0$  مورد نظر ما می‌باشد، که در این مسئله خاص جبهه تراک را نشان می‌دهد. اگر از  $\psi(x, y, t) = \text{const}$  مشتق کلی بگیریم، داریم:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{dz}{dt} = 0 \quad (1)$$

رابطه ۱ معادله کلی Level set را نشان می‌دهد که می‌توان آن را به شکل زیر نیز نشان داد:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \bar{V} \cdot \nabla \psi = 0 \quad (2)$$

در رابطه ۲،  $\psi$  تابع Level set و  $V$  سرعت حرکت مرز می‌باشد. سرعت حرکت مرز با توجه به فیزیک مسئله تعیین می‌شود. در اینجا سرعت حرکت مرز، تابعی از انحنای شاک است و با  $D(\kappa)$  نشان داده می‌شود که اگر آن را در معادله ۲ قرار دهیم، رابطه ۳ به دست می‌آید.

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \nabla \psi \cdot D(\kappa) = 0 \quad (3)$$

جهت حرکت جبهه تراک را به صورت عمود بر شاک و از محصولات حاصل از انفجار به سمت مواد نسوخته مثبت در نظر می‌گیریم. سرعت حرکت جبهه تراک را می‌توان به صورت مجموع دو مولفه مماسی و عمودی بیان کرد:

$$\bar{D}(\kappa) = \bar{D}_n + \bar{D}_t \quad (4)$$

اگر رابطه ۴ را در رابطه ۳ قرار دهیم، با توجه به اینکه  $\bar{D}_t \cdot \nabla \psi = 0$  است، مولفه مماسی از معادله Level set حذف می‌شود (مولفه مماسی بر گرادیان عمود است). با استفاده از روابط ۵ و ۶ نهایتاً معادله Level set به شکل رابطه ۷ در می‌آید.

$$\bar{n} = \frac{\nabla \psi}{|\nabla \psi|} \quad (5)$$

$$D \cdot \bar{n} = D_n \quad (6)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + D_n(\kappa) |\nabla \psi| = 0 \quad (7)$$

با استفاده از رابطه بین مولفه عمودی سرعت تراک و انحنای جبهه تراک  $(D-\kappa)$  که به شکل رابطه ۸ می‌باشد، معادله Level set به شکل رابطه ۹ در می‌آید.

$$D_n = D_{Cl} - \alpha(\kappa) \quad (8)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + D_{Cl} |\nabla \psi| - \alpha(\kappa) |\nabla \psi| = 0 \quad (9)$$

همچنین با توجه به اینکه  $\kappa = \nabla \cdot \bar{n}$ ، برای به دست آوردن انحنای در رابطه ۹ در حالت دوبعدی، رابطه ۱۰ به دست می‌آید:

$$\kappa = \frac{\psi_{xx}\psi_y^2 - 2\psi_{xy}\psi_x\psi_y + \psi_{yy}\psi_x^2}{(\psi_x^2 + \psi_y^2)^{3/2}} \quad (10)$$

معادله ۹، معادله‌ای است که به روش صریح<sup>۱</sup> حل می‌شود. برای حل این معادله شرایط اولیه و شرایط مرزی خاصی نیاز است، که در ادامه به آن‌ها پرداخته می‌شود.

### ۳-۱- شرایط اولیه

شرایط اولیه در این معادله، مکان اولیه تابع صفر Level set را نشان می‌دهد. همان‌گونه که پیشتر نیز ذکر شد، محل تابع صفر Level set، مکان جبهه تراک را نشان می‌دهد. بنابراین، در ابتدای لوله که جبهه تراک تخت قرار دارد، مقدار تابع Level set، برابر صفر است و در بقیه نقاط نیز فاصله نقاط از محل جبهه تراک به عنوان مقدار اولیه تابع Level set، لحاظ می‌گردد. چون در این حالت، جبهه تراک به صورت تخت است و انحنا ندارد، سرعت اولیه تابع صفر Level set، برابر  $D_{CJ}$  است.

### ۳-۲- شرایط مرزی

برای تعقیب جبهه تراک به کمک روش Level set، سه نوع شرط مرزی استفاده می‌شود که در شکل ۳ نشان داده شده‌اند. این شرایط مرزی عبارتند از شرط مرزی تقارن، شرط مرزی غیر انعکاسی و شرط مرزی زاویه. در بعضی از مسائل، هندسه مسئله دارای تقارن است و برای کاهش محاسبات، حل را فقط تا خط تقارن انجام می‌دهیم و شرط مرزی تقارن را اعمال می‌کنیم. در این شرط مرزی مقدار  $\psi$  نقطه مرزی داخلی به نقطه مجازی خارجی منعکس می‌شود. به طور مثال اگر در  $x=0$ ، یک خط تقارن وجود داشته باشد و  $\psi_{0,j}^n$  در  $x=0$ ، قرار داشته باشد،  $\psi_{-1,j}^n = \psi_{1,j}^n$  می‌شود. به همین دلیل به آن شرط مرزی انعکاسی نیز گفته می‌شود.

شرط مرزی غیر انعکاسی زمانی استفاده می‌شود، که بخواهیم اطلاعات مرز به داخل میدان حل نرسد. در این مسئله خاص، برای مرزهای دامنه محاسباتی در فضای آزاد از این شرط مرزی استفاده می‌شود. برای اعمال آن یک برون‌یابی ساده نیاز است. بدین منظور مشتق با دقت مرتبه دوم را در جهت عمود بر مرز ثابت در نظر می‌گیریم. اگر شرط مرزی غیرانعکاسی را بخواهیم در  $x=0$ ، اعمال کنیم، داریم:

$$\psi_{-1,j}^n = 3\psi_{0,j}^n - 3\psi_{1,j}^n + \psi_{2,j}^n \quad (11)$$

شرط مرزی زاویه نسبت به دو شرط مرزی که پیشتر ذکر شد، اهمیت بیشتری دارد، زیرا فیزیک مربوط به برخورد شاک با دیواره را وارد میدان حل می‌کند. برای بیان این شرط مرزی ابتدا زاویه  $\theta$ ، که زاویه میان بردار عمود بر شاک در محل تماس با دیواره،  $\bar{n}_s$ ، و بردار عمود بر دیواره در محل تماس،  $\bar{n}_b$  است را تعریف می‌کنیم. برای اعمال این شرط مرزی نخست، تابع Level set دومی با نام  $\Phi$  را تعریف می‌کنیم که مقادیر مثبت آن نشان دهنده داخل دیواره لوله و مقادیر منفی آن داخل لوله و فضای باز و مقدار صفر آن دیواره لوله را نشان می‌دهد. سپس مقادیر مشتق مماسی و عمودی را در مرز بین دیواره و جبهه تراک، در مختصات عمود بر دیواره که در شکل ۴ نشان داده شده است، به دست می‌آوریم، که به ترتیب در روابط ۱۲ و ۱۳ نشان داده شده است. ( $\Delta = \Delta x = \Delta y$ )

$$\psi_n = \frac{\psi_{p2} - 4\psi_{p1} + 3\psi_{i,j}}{2\Delta} - \frac{\psi_{p2} - 2\psi_{p1} + \psi_{i,j}}{\Delta^2} \phi_{i,j} \quad (12)$$

$$\psi_t = \frac{\psi_{p4} - \psi_{p5}}{2\Delta} \quad (13)$$

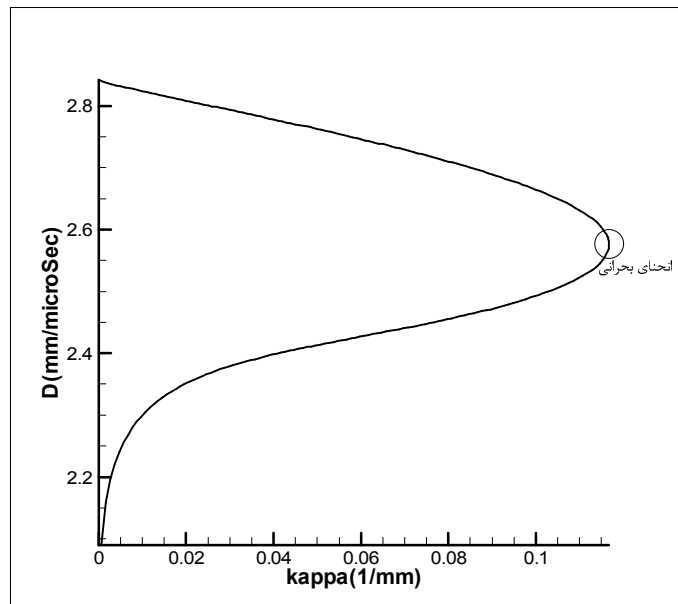
<sup>1</sup> Explicit



#### ۴- نتایج

مسئله‌ای که در این جا مورد بررسی قرار می‌گیرد، حرکت جبهه تراک از یک لوله به محیط باز می‌باشد. جبهه تراک تخت درون لوله حرکت می‌کند و زمانی که از لوله خارج می‌شود و به فضای باز می‌رود، از محل گوشه‌ی دیواره لوله، به شکل خمیده درمی‌آید. به دلیل تقارن موجود در مسئله فقط بخش بالایی لوله حل می‌شود. روند حل حاضر بدین شکل است که با استفاده از الگوریتم Level set، جبهه تراک درون لوله و در فضای باز با در نظر گرفتن انحنای آن تعقیب می‌شود. بدین منظور رابطه  $D-\kappa$  در معادله Level set قرار داده می‌شود و در واقع رابطه  $D-\kappa$ ، سرعت حرکت جبهه تراک را در این روش مشخص می‌کند. تعقیب جبهه تراک به روش Level set، اطلاعات مربوط به موقعیت و سرعت جبهه تراک را در هر لحظه می‌دهد که با تحلیل این نتایج می‌توان فوق بحرانی یا زیر بحرانی بودن رژیم جریان را مشخص کرد. در شکل ۵ نمودار مربوط به رابطه بین سرعت شاک و انحنای آن که با استفاده از تئوری DSD به دست آمده، نشان داده شده است. این نمودار مربوط به مخلوط استوکیومتریک هیدروژن و اکسیژن با مکانیزم کونوف، در دمای اولیه ۲۹۵ کلوین و فشار اولیه ۱ اتمسفر می‌باشد. در نمودار  $D-\kappa$ ، یک انحنای بحرانی وجود دارد که اگر جبهه تراک به این اندازه خمیده شود، خاموش می‌شود. به دلیل این که در تعقیب جبهه به روش Level set، خاموش شدن تراک از لحاظ فیزیکی پیش‌بینی نمی‌شود، این انحنای بحرانی، معیار خوبی برای تشخیص خاموشی تراک می‌باشد، که در ادامه نحوه استفاده از این معیار بیشتر توضیح داده خواهد شد.

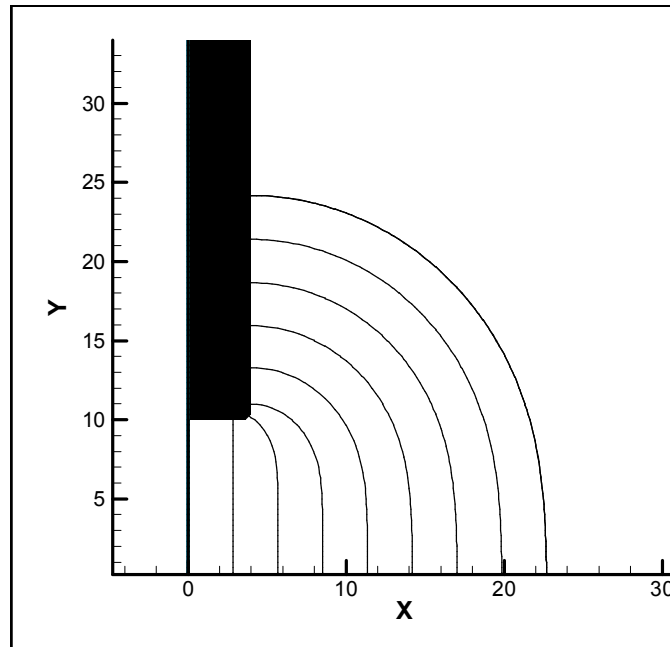
با استفاده از تعقیب جبهه تراک، موقعیت شاک در لحظات مختلف و سرعت عمودی آن در زمانی که از هر نقطه عبور می‌کرده است، به ترتیب در شکل‌های ۶ و ۷ نشان داده شده‌اند. همان‌گونه که در شکل ۶ نشان داده شده است، ابتدا جبهه تراک به صورت تخت در لوله حرکت می‌کند. پس از آن که جبهه تراک وارد محیط باز می‌شود، در گوشه دیواره یک موج انبساطی ایجاد می‌شود. این امر باعث می‌گردد تا جبهه تراک در نزدیکی گوشه دیواره از شکل تخت به شکل منحنی در آید و سرعت آن کاهش یابد. در زمان‌های بعدی این موج انبساطی از گوشه دیواره لوله به سمت خط تقارن آن در محیط باز انتشار می‌یابد و موجب افزایش انحنای جبهه و کاهش سرعت آن در نقاط دورتر از گوشه می‌گردد.



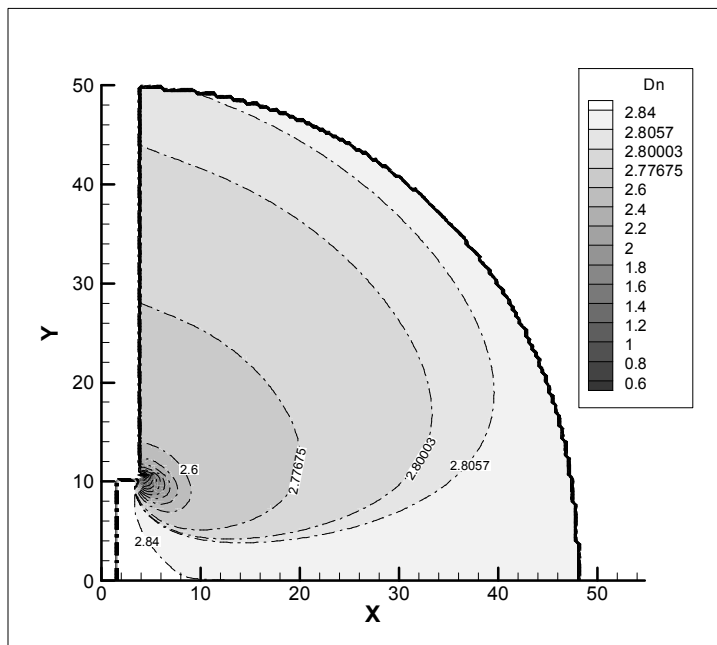
شکل ۵) رابطه  $D-\kappa$  برای مخلوط استوکیومتریک هیدروژن و اکسیژن، با مکانیزم کونوف<sup>۱</sup> در دمای اولیه ۲۹۵ کلوین و فشار اولیه ۱ اتمسفر

<sup>۱</sup> Konnov





شکل ۶) محل جبهه تراک پس از عبور از لوله به قطر ۲۰ میلی‌متر به فضای باز (محل جبهه تراک با فاصله زمانی ۱ میکروثانیه نشان داده شده است).



شکل ۷) کانتور مربوط به سرعت عمودی جبهه تراک. ( مخلوط استوکیمتریک اکسیژن و هیدروژن با لوله‌ای به قطر ۲۰ میلی‌متر)

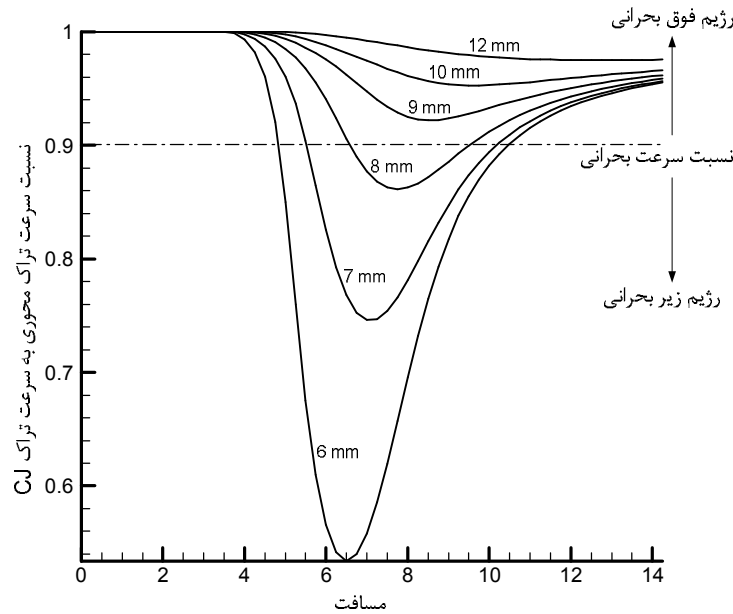
همان‌گونه که در مشاهدات تجربی نیز دیده شده است، در نزدیکی دیواره به دلیل اثر زیادی که امواج انبساطی دارند، می‌توانند سبب جدایی ناحیه واکنش و جبهه تراک شده و باعث خاموشی تراک به صورت موضعی



گردند. خاموشی تراک به صورت موضعی و در گوشه‌ی دیواره لوله، نمی‌تواند معیار خاموشی کلی تراک باشد. در حل حاضر با استفاده از روش Level set نیز، انحنای جبهه در کنار دیواره زیاد می‌شود و سرعت جبهه همان‌گونه که در شکل ۷ مشهود است، بسیار کاهش می‌یابد. بخشی از میدان که اهمیت فوق‌العاده‌ای در تشخیص فوق-بحرانی یا زیربحرانی بودن رژیم جریان دارد، سرعت جبهه تراک در محور می‌باشد. چون به هر مقداری که در گوشه‌ها جبهه تراک از ناحیه واکنش جدا شده و خاموش شود، به علت آغازش مجددی که در محور صورت می‌گیرد، جبهه تراک موفق به انتشار بدون خاموشی کلی می‌شود. سرعت جبهه تراک در محور، ابتدا برابر با تراک CJ است و خود جبهه به صورت تخت است. مشاهدات تجربی نشان می‌دهند که پس از آن که اثر موج انبساطی به محور می‌رسد، کاهش قابل ملاحظه‌ای در سرعت جبهه تراک در محور صورت می‌گیرد [۱]. سرعت بحرانی شاک، کمترین سرعتی را نشان می‌دهد که با توجه به شرایط ترمودینامیکی پشت شاک، به ناحیه واکنش این امکان را می‌دهد که انرژی لازم برای جدانشدن شاک و ناحیه واکنش را تولید کند [۱]. برای در نظر گرفتن معیاری برای خاموشی کلی تراک، این سرعت بحرانی به عنوان کمترین سرعتی است که جبهه تراک در روی محور می‌تواند داشته باشد تا خاموش نگردد. در شکل ۵ مقدار انحنای بحرانی برای مخلوط استوکیومتریک هیدروژن و اکسیژن برابر  $0.15$  (1/mm) و سرعت تراک متناظر با آن برابر با  $2/5559$  میلی‌متر بر ثانیه است. سرعت تراک CJ، برای این مخلوط برابر با  $2/8360$  میلی‌متر بر ثانیه می‌باشد. نسبت سرعت بحرانی به سرعت تراک CJ، برابر  $0.9$  می‌شود و این نسبت، به عنوان معیار خاموشی در نظر گرفته می‌شود و نتایج مربوط به سرعت تراک محوری که با روش تعقیب جبهه تراک به دست می‌آیند با این معیار سنجیده خواهند شد. در شکل ۸ نمودار سرعت محوری تراک بر حسب مسافت رسم شده است. همان‌گونه که در شکل ۸ مشاهده می‌شود، در ابتدا سرعت تراک برابر سرعت CJ است، سپس این سرعت کاهش می‌یابد و سپس دوباره به سمت سرعت تراک CJ میل می‌کند که مطابق با مشاهدات تجربی است. با توجه به معیار خاموشی که پیشتر ذکر شد، برای قطرهایی که مینیمم نمودار آن‌ها، کمتر از نسبت سرعت بحرانی است، رژیم جریان زیربحرانی است و تراک پس از رسیدن به فضای باز خاموش می‌شود. قطرهایی که مینیمم نمودار آن‌ها بالاتر از نسبت سرعت بحرانی است، رژیم جریان فوق بحرانی را نشان می‌دهند. بنابراین با توجه به شکل ۸، قطر بحرانی با استفاده از تئوری DSD حدوداً ۹ میلی‌متر است. این در حالی است که قطر بحرانی مربوط به نتایج تجربی برای این مخلوط برابر با ۲۰ میلی‌متر است [۱]. این اختلاف زیاد بین نتایج تجربی و تئوری DSD دلایل متعددی دارد. در مسئله تعیین قطر بحرانی پدیده‌های پیچیده‌ای همچون خاموشی تراک و آغازش مجدد وجود دارد، که در این روش، به دلیل اینکه معادلات بقا به طور مستقیم حل نمی‌شوند، امکان مشاهده این پدیده‌ها وجود ندارد. از سوی دیگر در مقایسه‌ای که بین جمله‌های موجود در حل کامل عددی صورت گرفته است [۱۸] سهم جملات ناپایی و آزاد شدن انرژی به مراتب بیشتر از سهم جمله انحنا است و چون این روش تنها به انحنا وابسته است، نمی‌تواند مقدار قطر بحرانی را به طور دقیق پیش‌بینی کند.

با توجه به تلاش‌های زیادی که در زمینه محاسبه قطر بحرانی صورت گرفته و اهمیتی که این مسئله در صنعت دارد، این نتایج با وجود خطای بالا نیز می‌توانند بسیار مفید باشند. به عنوان مثال در روش تحلیلی که شولتز<sup>۱</sup> [۱] در سال ۲۰۰۰، ارائه نمود، قطر بحرانی برای مخلوط استوکیومتریک هیدروژن و اکسیژن  $7/1$  میلی‌متر محاسبه شده است. مقایسه مقدار محاسبه شده از روش تحلیلی شولتز و حل حاضر، نشان می‌دهد که حل حاضر می‌تواند جواب‌هایی در محدوده نتایج تجربی به دست آورد و از لحاظ رفتار کیفی به نتایج تجربی نزدیک است.

<sup>1</sup> Schultz



شکل ۸) کاهش سرعت تراک در راستای محور نسبت به تراک CJ برای قطرهای متفاوت

## ۵- نتیجه گیری

در تحقیق‌های پیشین از تعقیب جبهه تراک با کمک رابطه  $D-k$  برای تعیین محل جبهه تراک در زمان‌های مختلف استفاده شده است. علاوه بر تعیین محل جبهه تراک، در کار حاضر امکان محاسبه قطر بحرانی با کمک رابطه  $D-k$  و یک الگوریتم تعقیب ناپیوستگی‌ها به نام Level set مورد بررسی قرار گرفته است. به دلیل ماهیت پیچیده مسئله و وجود پدیده‌هایی همچون خاموشی موضعی تراک و آغازش مجدد در آن، این روش قادر به پیش‌بینی دقیق قطر بحرانی نمی‌باشد. هر چند این روش قادر است که کاهش سرعت محوری را پس از رسیدن امواج انبساطی به آن و سپس افزایش تا مقدار سرعت CJ را به صورت کیفی نشان دهد ولی مقدار این کاهش از لحاظ کمی با نتایج تجربی همخوانی ندارد. سرعت جبهه تراک در این روش تنها به انحنا وابسته است و می‌توان نشان داد که اثر جمله انحنا نسبت به بقیه جمله‌ها مانند ناپایی از اهمیت کمتری برخوردار است [۱]. به دلیل اینکه جبهه تراک پس از ورود به محیط باز تغییر سرعت می‌دهد، رابطه  $\dot{D} - D - k$  که با در نظر گرفتن شتاب جبهه تراک می‌باشد، می‌تواند جایگزین رابطه  $D-k$  در الگوریتم تعقیب جبهه تراک شود و انتظار می‌رود پیش‌بینی‌های دقیق‌تری داشته باشد.

## مراجع

- 1- Schultz, E., Detonation diffraction trough an abrupt area expansion. Ph.D thesis, California Institute of Technology, 2000.
- 2- John H. S. Lee, The Detonation phenomena, Cambridge University press, 2008.
- 3- Zeldovich IaB, Kogarko SM, Simonov NN, An experimental investigation of spherical detonation in gases. Soviet Phys Tech Phys, 1(8), 1689-1713, 1956.
4. Mitrofanov VV, Soloukhin RI, The diffraction of multifront detonation waves. Soviet Physics - Doklady, 9(12), 1055-1058, 1965.



انجمن احتراق ایران

FCCI2010-1186

## سومین کنفرانس سوخت و احتراق ایران

تهران - دانشگاه صنعتی امیرکبیر - اسفند ماه ۱۳۸۸



دانشگاه صنعتی امیرکبیر

دانشکده مهندسی هوافضا

- 5- Soloukhin RI, Ragland KW, Ignition processes in expanding detonations. *Combustion and Flame*, 13,295-302, 1969.
- 6- Murray SB, Lee JH On the transformation of planar detonation to cylindrical detonation. *Combustion and Flame*, 52, 269-289, 1983.
- 7- Pantow EG, Fischer M, Kratzel Th, Decoupling and recoupling of detonation waves associated with sudden expansion. *Shock Waves*, 6, 131-137, 1996.
- 8- Edwards DH, Thomas GO, Nettleton MA, Diffraction of a planar detonation in various fuel-oxygen mixtures at an area change. *Progress in Astronautics and Aeronautics*, 76, 341-357, 1981.
- 9- Knystautas R, Guirao C, Lee JH, Sulmistras, A Measurements of cell size in hydrocarbon-air mixtures and prediction of critical tube diameter, critical initiation energy, and detonability limits. *Progress in Astronautics and Aeronautics*, 94, 23-37, 1984.
- 10- Moen IO, Funk JW, Ward SA, Rude GM, Thibault PA., Detonation length scales for fuel-air explosives. *Progress in Astronautics and Aeronautics*, 94, 55-79, 1984.
- 11- Shepherd JE, Moen IO, Murray SB, Thibault PA, Analysis of the cellular structure of detonations. 21st Combustion Symposium, 1649-1658, 1986.
- 12- Lee JH, Matsui H, A comparison of the critical energies for direct initiation of spherical detonations in acetylene-oxygen mixtures. *Combustion and Flame*, 28,61-66, 1977.
- 13- David E.Lambert, D.Scott Stewart, Sunhee Yoo, Bradley L.Wescott, Experimental Validation of detonation shock dynamics in condensed explosives, *J. Fluid Mechanics*, 546, 227-253, 2006
- 14- Bdzil, J. D. and Stewart, D. S., Modeling of two-dimensional detonation with detonation shock dynamics, *Physics of Fluids*, 1, 1261-1267, 1989.
- 15- Yao, J. and D. S. Stewart, On the dynamics of multi-dimensional detonation. *J. Fluid Mech.* 309, 225-275, 1996.
- 16- Osher, R.P. Fedkiw, *Level Set Methods and Dynamic Implicit Surfaces*, Springer, 2003
- 17- Aslam, T. D., Bdzil, J. B., and Stewart, D. S., Level set methods applied to modeling detonation shock dynamics, *Journal of Computational Physics*, 126, 390-409, 1996
- 18- Marco Arienti., *A Numerical and Analytical Study of Detonation Diffraction*, Ph.D thesis, California Institute of Technology, 2003.