

## تحلیل غیر خطی ناپایداری احتراق

صادق مطهر<sup>۱</sup>، احمد صداقت<sup>۲</sup>

دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی اصفهان  
[sedaghat@cc.iut.ac.ir](mailto:sedaghat@cc.iut.ac.ir)

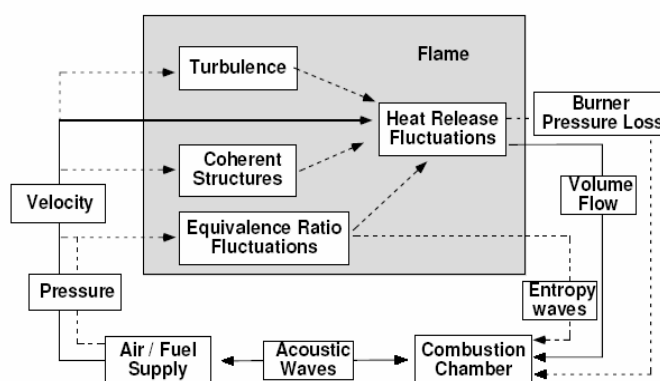
### چکیده

در این مقاله یک مدل ریاضی برای ناپایداری احتراق در اثر کوپلینگ غیر خطی شعله و امواج اکوستیکی ارائه شده است. در این مدل ابتدا با در نظر گرفتن یک انرژی فعالسازی بزرگ و یک عدد ماخ کوچک فرمولهای کلی به دست می آیند. سپس صورت غیر خطی ضعیف شده ی ناپایداری داریوس - لاندای در مورد شعله ی خمیده و مود اکوستیکی در حضور میدان جاذبه بررسی می شود. از نتایج به دست آمده مشاهده می شود که کوپلینگ غیر خطی باعث رشد در سرعت تقویت امواج می شود.

واژه های کلیدی: ناپایداری داریوس- لاندای- کوپلینگ غیر خطی- امواج اکوستیک- شعله ی خمیده.

### ۱-مقدمه

ناپایداری ترمواکوستیکی احتراق یکی از دلایل توجه ویژه به عملکرد وسایلی چون مشعلها، توربین های گاز، موتورهای موشکها و موارد دیگر می باشد. این نوع ناپایداری وقتی اتفاق می افتد که بین امواج اکوستیکی و گرمای ناپایدار آزاد شده برهم کنش اتفاق بیفتد (البته اثرات دیگری نیز مهم می باشند که عبارتند از: ساختارهای به هم پیوسته جریان، انتروپی و مقدار سوخت) (شکل ۱).



شکل ۱- برهم کنش صوت، جریان و گرمای آزاد شده [۱]

۱- دانشجوی کارشناسی ارشد مهندسی مکانیک

۲- استادیار مهندسی هوافضا

عمومی ترین تئوری در مورد ناپایداری ترموآکوستیکی توسط رایلی [۱] در ۱۸۷۸ بیان شده است: «وقتی که گرما بصورت محلی و پربودیک در یک محیط گازی آزاد شود نوسانات امواج آکوستیکی تقویت خواهند شد، اگر مولفه های فشار و انتقال گرما هم فاز باشند.» جمله ی فوق به این معنی است که انتگرال حاصلضرب فشار و گرمای آزاد شده در یک سیکل باید مثبت باشد یعنی :

$$\oint p'Q'dt > 0 \quad (1)$$

که  $p'$  نوسانات فشار و  $Q'$  نوسانات گرمای آزاد شده می باشند. از عمده مشکلات اعمال این روش مجهول بودن گرمای ناپایدار آزاد شده می باشد. یکی از روش ها برون یابی با استفاده از داده های آزمایشی و استفاده از روابط تجربی بین گرمای ناپایدار آزاد شده و نوسانات امواج آکوستیک می باشد. بعضی از این روشها در کارهای بلوکسیج وهمکاران [۲] جهت تشریح لانه زنبوری های بازگرم شده ارائه شده است. داوولینگ [۳] نتایج بلوکسیج را فرموله کرده و در موارد دیگر نیز به کار گرفته است. تا کنون تئوری دقیقی برای کوپلینگ صوت و شعله در محفظه های احتراق که جریان در آنها کاملاً چرخشی و مغشوش است ارائه نشده است. بنا بر این در این مقاله به عنوان اولین قدم فرض می کنیم حرکت هیدرو دینامیکی اولیه در اثر گرمای ناپایدار آزاد شده است و جریان هم به صورت آرام باقی می ماند. برای رژیم های فرکانس بالا یک فرمول برای کوپلینگ صوت وشعله توسط هارتن و همکاران [۴] ارائه شده است که در آن مقیاس زمانی قابل مقایسه با زمان گذر شعله،  $O(d/U_L)$ ، می باشد که  $d$  ضخامت شعله و  $U_L$  سرعت شعله است. سیستم به دست آمده توسط آن ها غیر خطی و نیازمند محاسبات عددی پیچیده است. آن ها یک شعله ی تخت در نظر گرفته اند که دارای فرکانس های پایین و گرمای آزاد شده کم است و با این دو محدودیت اثرات فشار آکوستیکی روی شعله را به دست آوردند، اما اشاره ای به چگونگی اثر شعله روی امواج آکوستیک نکردند. فرایند معکوس توسط کلاوین وهمکاران [۵] با برداشتن محدودیت گرمای آزاد شده کم انجام شد. آن ها نشان دادند برابری دو طرفه موجب تقویت امواج آکوستیک می شود و این یعنی ناپایداری آکوستیکی.

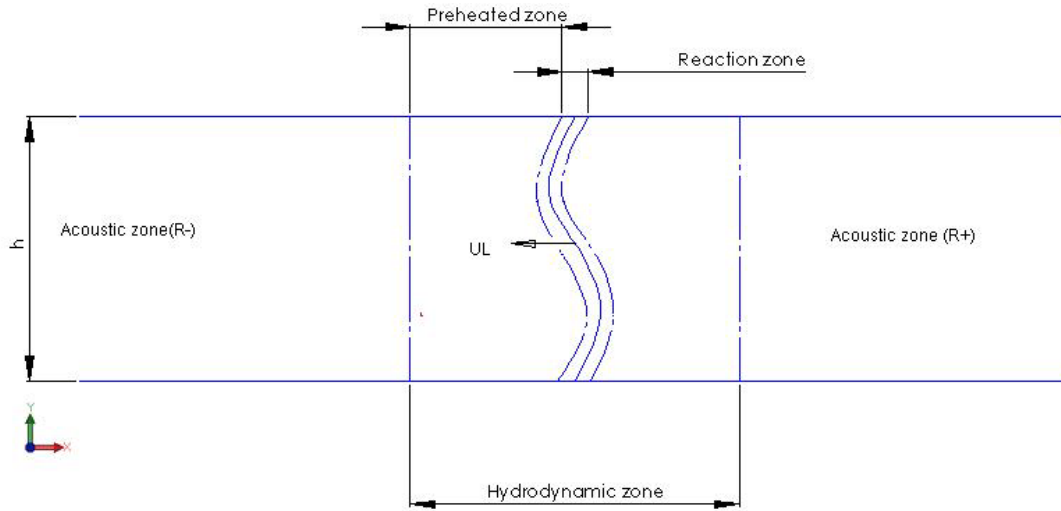
برای یک شعله ی خمیده یک مکانیزم اضافی کوپلینگ وجود دارد که توسط مارکستین [۶] بیان شده است. فشار آکوستیکی شعله را تعدیل کرده و بنا بر این سطح آن را خم می کند. این مکانیزم اولین با توسط پلکه و راجورگر [۷] همزمان با آزمایش سیربای [۸] انجام شد. آن ها نشان دادند که وقتی یک شعله ی خمیده در لوله به سمت پایین حرکت می کند صدا تولید می شود. شعله ی خمیده در اثر ناپایداری داریوس - لاندای وجود می آید. پلکه و راجورگر از نظرریاضی نشان دادند که شعله خمیده مود پایدار خنثی ناپایداری داریوس - لاندای می باشد. در کار حاضر بهبودی مدل پلکه و راجورگر از دو جهت حاصل شده است:

- (۱) مانند هر مود در حاشیه ی پایداری، مود خنثای ناپایداری داریوس - لاندای باید علاوه بر اینکه کاملاً خنثی است، جواب غیر خطی ضعیف شده را هم ارضا کند. طبق تئوری غیر خطی ضعیف شده استوارت [۹] اندازه مود  $\epsilon$  با ثابت زمانی تعدیل  $O(\epsilon^{-2})$ ، قابل مقایسه با ثابت زمانی است که امواج آکوستیکی تقویت می شود.
- (۲) آزمایش سیربای [۸] نشان داد که شعله رشد می کند و امواج آکوستیکی تا زمانی که شعله از خمیده به تخت تبدیل شود تقویت می شود. بنابراین از لحاظ ریاضی و فیزیکی لازم است که طبیعت رشد شعله به خوبی تأثیر امواج آکوستیک روی شعله مورد بررسی قرار گیرد.

## ۲- معادلات حاکم

احتراق یک مخلوط پیش آمیخته را درون یک مجرا به عرض  $h$  در نظر بگیرید (شکل ۲). واکنش شیمیایی، اگزوترمیک برگشت ناپذیر یک مرحله ای فرض می شود. مخلوط گازی شامل یک سوخت غنی که از معادله گاز کامل پیروی می کند می باشد. مخلوط قبل از احتراق دارای چگالی  $\rho_{-\infty}$  و دمای  $\Theta_{-\infty}$  می باشد. در اثر انتقال گرمای پایدار دمای متوسط پشت شعله

به  $\Theta_\infty$  افزایش و چگالی متوسط پشت شعله به  $\rho_\infty$  کاهش می یابد. شعله با سرعت  $U_L$  و ضخامت  $d$  داخل مخلوط پخش می شود.



شکل ۲- نواحی مربوط به حل مساله

$(x, y, z)$  مختصات مکانی و  $t$  متغیر زمانی است که با  $h/U_L$  نرمالیزه می شود. سرعت  $\mathbf{u}=(u, v, w)$ ، چگالی  $\rho$ ، دمای  $\theta$  و فشار  $p$  به ترتیب توسط  $\rho U_L$ ،  $\Theta_\infty$  و  $\rho U_L^2$  بدون بعد می شوند. عدد ماخ به صورت  $M = U_L/a$  تعریف می شود که  $a = \sqrt{\gamma p_\infty / \rho_\infty}$  سرعت صوت و  $\gamma$  نسبت گرماهای ویژه است. یک فرض ساده کننده ی کلیدی انرژی فعالسازی بزرگ است که با عدد زدوویچ بیان می شود:

$$\beta = E(\Theta_\infty - \Theta_{-\infty}) / \bar{R}\Theta_\infty^2 \gg 1 \quad (2)$$

که  $E$  انرژی فعالسازی و  $\bar{R}$  ثابت جهانی گاز ها می باشد. تحت این فرض واکنش در یک ناحیه نازک با ضخامت  $O(d/\beta)$  انجام می شود. فرض کنیم جلوی شعله با مختصات  $x=f(y, z, t)$  مشخص شده است. دستگاه مختصات متصل به جلوی شعله را به صورت زیر در نظر می گیریم:

$$\xi = x - f(y, z, t), \quad \eta = y, \quad \zeta = z$$

و سرعت را به دو مؤلفه تقسیم می کنیم:  $\mathbf{u} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j}$  که  $\mathbf{i}$  بردار یکه در راستای مجراست. ماتالون و ماتکوسکی [۱۰] روابط حاکم را به صورت زیر به دست آورده اند:

$$\rho \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho s}{\partial \xi} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (3)$$

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho s \frac{\partial u}{\partial \xi} + \rho v \cdot \nabla u = -\frac{\partial p}{\partial \xi} + \delta \text{Pr} \left\{ \Delta u + \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\partial s}{\partial \xi} + \nabla \cdot \mathbf{v} \right) \right\} - \rho G \quad (4)$$

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} + \rho s \frac{\partial v}{\partial \xi} + \rho v \cdot \nabla v = -\nabla p + \nabla f \frac{\partial p}{\partial \xi} + \delta \text{Pr} \left\{ \Delta v + \frac{1}{3} (\nabla - \nabla f \frac{\partial}{\partial \xi}) \left( \frac{\partial s}{\partial \xi} + \nabla \cdot \mathbf{v} \right) \right\}$$

$$\rho \frac{\partial Y}{\partial t} + \rho s \frac{\partial Y}{\partial \xi} + \rho v \cdot \nabla Y = \delta Le^{-1} \Delta Y - \delta \Omega \quad (5)$$

$$\rho \frac{\partial \theta}{\partial t} + \rho s \frac{\partial \theta}{\partial \xi} + \rho v \cdot \nabla \theta = \delta \Delta \theta + \delta q \Omega \quad (6)$$

که معادله ی حالت به صورت  $\gamma M^2 p = \rho \theta$  و بقیه ی ترم ها را به صورت زیر است:

$$\Delta = \left[1 + (\nabla f)^2\right] \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \nabla^2 - \nabla^2 f \frac{\partial}{\partial \xi} - 2 \frac{\partial}{\partial \xi} (\nabla f \cdot \nabla) \quad \text{و } s = u - f_t - v \cdot \nabla f \quad \text{و } \delta = d/h$$

که در اینجا اوپراتور  $\nabla$  و  $\nabla^2$  نسبت به  $\eta$  و  $\xi$  تعریف می شوند.  $Le$  و  $Pr$  به ترتیب اعداد پرانتل و لوئیس هستند، همچنین  $G = gh/U_L^2$  نیروی گرانش نرمالیزه شده است. نرخ واکنش که بوسیله قانون آرنهیموس تعریف می شود به صورت زیر است:

$$\Omega \propto \delta^{-2} \rho Y \exp \left\{ \beta \left( \frac{1}{\Theta_+} - \frac{1}{\theta} \right) \right\} \quad (7)$$

که در آن  $\Theta_+ = 1 + q$  دمای شعله آدیاباتیک است. فرض انرژی فعالسازی بزرگ به سمت عدد لوئیس نزدیک یک رهنمون می شود [۱۲]:

$$Le = 1 + \beta^{-1} l, l = O(1) \quad (8)$$

به علاوه جهت حل تحلیلی فرض می کنیم:

$$\delta \ll 1 \quad \text{و} \quad M \ll 1 \quad (9)$$

کل جریان توسط چهار ناحیه محدود بیان می شود (شکل ۲). در ناحیه واکنشی انتقال حرارت در اثر واکنش، دیفیوژن حرارتی را بالانس می کند و تغییرات اجزای مولکولی، دیفیوژن جرم را بالانس می کند [۱۱]. در ناحیه پیش گرم شده بالانس غالب بین ادوکسیون و دیفیوژن است.

برخورد مستقیم صوت و شعله در ناحیه هیدوردینامیکی است. در این ناحیه فرض می کنیم حل به صورت زیر بسط داده

می شود:

$$\begin{aligned} (\rho, \theta) &= (R_0, \Theta) + \delta(\rho_1, \theta_1) + \dots \\ (u, v, f) &= (u_0, v_0, f_0) + \delta(u_1, v_1, f_1) + \dots \\ p &= (R_0 G \xi) + p_0 + \delta p_1 + \dots \end{aligned} \quad (10)$$

حل چگالی بنابر [۱۰] به صورت زیر است:

$$R_0 = \begin{cases} 1 \equiv R_{-\xi} < 0 \\ (1+q)^{-1} \equiv R_{+\xi} > 0 \end{cases} \quad (11)$$

با جایگزینی معادله (۱۱) در (۳) و (۴) و (۵) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \frac{\partial s_0}{\partial \xi} + \nabla \cdot v_0 &= 0 \\ R \left\{ \frac{\partial u_0}{\partial t} + s_0 \frac{\partial u_0}{\partial \xi} + v_0 \cdot \nabla u_0 \right\} &= - \frac{\partial p_0}{\partial \xi} \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} R \left\{ \frac{\partial v_0}{\partial t} + s_0 \frac{\partial v_0}{\partial \xi} + v_0 \cdot \nabla v_0 \right\} &= - \nabla p_0 + \nabla f_0 \frac{\partial p_0}{\partial \xi} - R G \nabla f_0 \\ \text{که در آن } s_0 &= u_0 - f_{0,t} - v_0 \cdot \nabla f_0 \end{aligned}$$

$$f_{0,t} = u_0(0^-, \eta, \zeta, t) - v_0(0^-, \eta, \zeta, t) \cdot \nabla f_0 - ((1 + (\nabla f_0)^2)^{1/2}) \quad (13)$$

### ۳- فرمول عمومی برهم کنش صوت و شعله

ناحیه اکوستیکی: حرکت امواج اکوستیکی می تواند توسط رابطه زیر بیان شود:

$$\tilde{\xi} = M \xi \quad (14)$$

در راستای محور X طول بیشتری داریم، پس نوسانات طولی حول یک مقدار متوسط بصورت زیر است :

$$p = \frac{1}{\gamma M^2} + M^{-1} p_a(\tilde{\xi}, t) + \dots \quad (15)$$

$$u = U_{\pm} + u_a(\tilde{\xi}, t) + \dots$$

که  $U_{\pm}$  سرعت متوسط در عقب و جلوی شعله است. فشار  $p_a$  و سرعت  $u_a$  معادلات خطی زیر را ارضا می کند :

$$R \frac{\partial^2 p_a}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 p_a}{\partial \tilde{\xi}^2} = 0 \quad \text{و} \quad R \frac{\partial u_a}{\partial t} = \frac{\partial p_a}{\partial \tilde{\xi}} \quad (16)$$

که وقتی  $\tilde{\xi} \rightarrow \pm 0$ :

$$u_a \rightarrow u_a(0^{\pm}, t) + \dots, \quad (17)$$

$$p_a \rightarrow p_a(0, t) + p'_a(0^{\pm}, t) \tilde{\xi} + \dots$$

**ناحیه هیدرودینامیکی:** در این ناحیه  $u_a$  و  $p_{a,\tilde{\xi}}$  در دو طرف شعله یکنواختند. بنابراین می توان آنها را توسط مقادیرشان در  $\tilde{\xi} = 0^{\pm}$  تقریب زد. برای مهیا کردن شرایط هم خوانی حل با ناحیه اکوستیکی، مؤلفه های ناحیه اکوستیکی و جریان متوسط را از کل جریان کم می کنیم :

$$u_0 = U_{\pm} + u_a(0^{\pm}, t) + U_0$$

$$p_0 = \frac{1}{\gamma M^2} + P_{\pm} + p'_a(0^{\pm}, t) \xi + P_0 \quad (18)$$

$$f_0 = F_a + F_0$$

که  $P_{\pm}$  فشار متوسط و  $F_a = U_{-} - 1 + u_a(0^{-}, t)$

با فرض  $v_0 = V_0$  معادلات زیر در ناحیه هیدرودینامیکی ارضا می شوند :

$$\frac{\partial U_0}{\partial \xi} + \nabla \cdot V_0 = \frac{\partial V_0}{\partial \xi} \cdot \nabla F_0 \quad (19)$$

$$\frac{\partial U_0}{\partial \xi} + R \left\{ \frac{\partial U_0}{\partial t} + S_0 \frac{\partial U_0}{\partial \xi} + V_0 \cdot \nabla U_0 \right\} = - \frac{\partial P_0}{\partial \xi} - R J h(\xi) \frac{\partial U_0}{\partial \xi} \quad (20)$$

$$\frac{\partial V_0}{\partial \xi} + R \left\{ \frac{\partial V_0}{\partial t} + S_0 \frac{\partial V_0}{\partial \xi} + V_0 \cdot \nabla V_0 \right\} = - \nabla P_0 + \nabla F_0 \frac{\partial P_0}{\partial \xi} - R J h(\xi) \frac{\partial V_0}{\partial \xi} - R G \nabla F_0 + p'_a(0^{\pm}, t) \nabla F_0 \quad (21)$$

که جلوی شعله توسط معادله زیر بیان می شود:

$$F_{0,t} = U_0 - V_0 \cdot \nabla F_0 - \{ (1 + (\nabla F_0)^2)^{1/2} - 1 \} \quad (22)$$

$h(\xi)$  تابع پله ای هویساید،  $J = q \{ (1 + (\nabla F_0)^2)^{1/2} - 1 \}$  و  $S_0 = U_0 - F_{0,t} - V_0 \cdot \nabla F_0$  که  $\bar{\phi}$  نشان دهنده متوسط فضایی روی صفحه  $(\eta, \zeta)$  می باشد.

هم خوانی با حل ناحیه اکوستیکی بیرون نیازمند زیر است :

$$U_0 \rightarrow 0, V_0 \rightarrow 0, \quad \text{وقتی } \xi \rightarrow \pm \infty \quad (23)$$

$$P_{0,\xi} \rightarrow 0$$

معادلات هیدرودینامیکی (۱۹) - (۲۱) و معادله اکوستیک (۱۶) یک سیستم برهم کنش را تشکیل می دهند. فشار اکوستیکی شعله را تعدیل می کند که ثابت می کند صدا در اثر آزاد شدن گرمای نا پایدار تولید می شود.

#### ۴- تحلیل غیر خطی ضعیف شده

ناپایداری داریوس- لاندای بیان می کند که یک شعله تخت با داشتن پخش متفاوت جرم و گرما یا اثرات هیدرودینامیکی بوجود آمده با انبساط گاز، ناپایدار می شود. در اینجا این سؤال پیش می آید که چگونه ناپایداری احتراق در مقیاسهای بالا وابسته به ناپایداریهای شعله ای است که در مقیاس های کوچک که جریان نا پایدار تراکم ناپذیر است وجود دارد. یک پیشنهاد طبیعی این است که بگوییم ناپایداری احتراق وقتی بوجود می آید که مودهای اکوستیکی محفظه احتراق بوسیله ناپایداریهای شعله برانگیخته و تقویت شوند. ناپایداری داریوس- لاندای شاید مهم ترین عامل محرک برای ناپایداری احتراق باشد.

**تحلیل هیدرودینامیک شعله:** برای سادگی فرض کنیم شعله دو بعدی است. شعله پایدار است اگر سرعت شعله  $U_L$  کمتر از مقدار بحرانی آن یعنی  $U_L = (gh/(\pi(1+q)))^{1/2}$  باشد [۱۲]. همچنین فرض می کنیم اندازه مودخنشای ناپایداری داریوس- لاندای از  $O(\varepsilon)$  باشد، بنابراین برهم کنش غیر خطی در مقیاس زمانی  $O(\varepsilon^{-2})$  اتفاق می افتد [۹] داریم:

$$\tau = \varepsilon^2 t \quad (24)$$

$U_L$  می تواند حول مقدار خنثی با مقداری از  $O(\varepsilon^{-2})$  نوسان کند یعنی:

$$\frac{gh}{U_L^2} = \pi(1+q) + \varepsilon^2 g_d \quad (25)$$

با فرض  $\delta = O(\varepsilon^2)$  بدون از دست دادن کلیت مساله می توان  $\delta = \varepsilon^2$  گرفت. سرعت و فشار در ناحیه هیدرو دینامیکی بصورت زیر بسط می شوند:

$$\begin{aligned} U_0 &= \varepsilon U_1 + \varepsilon^2 U_2 + \varepsilon^3 U_3 + \dots \\ V_0 &= \varepsilon V_1 + \varepsilon^2 V_2 + \varepsilon^3 V_3 + \dots \\ P_0 &= \varepsilon P_1 + \varepsilon^2 P_2 + \varepsilon^3 P_3 + \dots \end{aligned} \quad (26)$$

بسط  $F_0$  کمی متفاوت است:

$$F_0 = F_0(\tau) + \varepsilon F_1 + \varepsilon^2 F_2 + \varepsilon^3 F_3 + \dots \quad (27)$$

که جمله  $O(1)$  به دلیل ادوکیون جلوی شعله به واسطه ی انباشته شدن اثرات جریان است. با جایگزینی این بسط ها در معادلات (۱۹) - (۲۲) و بسط تا  $O(\varepsilon^3)$  یک دنباله از معادلات را به دست خواهیم آورد. جملات مرتبه اول توسط [۱۲] بصورت زیر به دست آمده اند:

$$\begin{aligned} U_1 &= A(\tau)(-P^\pm e^{-\kappa\xi} + C^\pm)(e^{i\kappa\eta} + c.c.) \\ V_1 &= A(\tau)P^\pm e^{-\kappa\xi}(ie^{i\kappa\eta} + c.c.) \\ P_1 &= A(\tau)(P^\pm e^{-\kappa\xi} - R_\pm G_c F_1)(e^{i\kappa\eta} + c.c.) \\ F_1 &= A(\tau)F_1(e^{i\kappa\eta} + c.c.) \end{aligned} \quad (28)$$

که  $A$  تابع دامنه مود ناپایداری داریوس- لاندای است و  $C^- = 0$  شرایط هم خوانی در بالاست جریان را ارضا می کند. عدد موج  $\kappa = \pi$  و در  $\eta = 0, 1$ ،  $V_1 = 0$  برای پیدا کردن جواب غیر صفری  $gh/U_L^2 = \pi(1+q)$  می رسمیم که رابطه ی مشخصه است.

بسط جملات مرتبه ی دوم  $O(\varepsilon^2)$  و جملات مرتبه ی سوم  $O(\varepsilon^3)$ ، در پیوست آمده است.

حل  $F_2$  و  $U_2$  بصورت زیر می باشد:

$$\begin{aligned} F_2 &= U_{2,a} AB(e^{i\kappa\eta} + c.c.)e^{i\omega t} + U_{2,2} A^2(e^{2i\kappa\eta} + c.c.) + U_{2,0} A^2 \\ U_2 &= F_{2,a} AB(ie^{i\kappa\eta} + c.c.)e^{i\omega t} + F_{2,2} A^2(e^{2i\kappa\eta} + c.c.) \end{aligned} \quad (29)$$

در مرتبه ی سوم ، فقط لازم است مؤلفه هایی که با مود ناپایداری داریوس- لاندنا منطبقند در نظر گرفته شوند :

$$\begin{aligned} U_3 &= U_{3,1}(e^{i\kappa\eta} + c.c.) \\ P_3 &= P_{3,1}(e^{i\kappa\eta} + c.c.) \\ F_3 &= F_{3,1}(e^{i\kappa\eta} + c.c.) \\ V_3 &= V_{3,1}(ie^{i\kappa\eta} + c.c.) \end{aligned} \quad (30)$$

معادله ی دامنه بصورت زیر به دست آمده است [۱۳]:

$$\frac{dA}{d\tau} = \kappa A + \gamma_s A^3 - \gamma_b |B|^2 A \quad (31)$$

که ضرایب آن عبارتند از:

$$\kappa = -\frac{q}{2(1+q)} g_d - \frac{1}{2} k^2 \left\{ q + \frac{1+q}{q} ((q+2) \ln(1+q) + ID(q)) \right\}, \quad (32)$$

$$D(q) = \int_0^\infty \ln(1+qe^{-x}) dx$$

$$\gamma_s = (4-q)(1+q)k^3 / 2q \quad (33)$$

$$\gamma_b = \{4(R_+ - R_-)^2(1+R_+/R_-)\kappa\omega^2 \sin^2(R_-^{1/2}\sigma\omega L)\} / \{(R_+ + R_-)^2\omega^2 + 4\kappa^2\} \quad (34)$$

**تحلیل اکوستیک:** فشار و سرعت نوسانات اکوستیکی توسط زیربسط داده می شوند:

$$p_a = \varepsilon B(\tau) p_{a,1} + \varepsilon^3 p_{a,2} + \dots \quad (35)$$

$$u_a = \varepsilon B(\tau) u_{a,1} + \varepsilon^3 u_{a,2} + \dots$$

که B تابع دامنه است .

بسط تا جملات مرتبه ی سوم، معادله زیر را برای دامنه ی مود اکوستیکی ارائه می دهد:

$$\frac{dB}{d\tau} = \chi A^2 B \quad (36)$$

که ضریب آن عبارت است از:

$$\chi = \frac{i2qk^3 R_-^{-1/2} (R_+ - R_-) \Lambda}{L(i(R_+ + R_-)\omega + 2\kappa)}, \quad (37)$$

$$\Lambda = \frac{\tan(R_-^{1/2}\sigma\omega L)}{\sigma \sec^2(R_-^{1/2}\sigma\omega L) + (1-\sigma)(R_+/R_-)\sec^2(R_+^{1/2}(1-\sigma)\omega L)\tan^2(R_-^{1/2}\sigma\omega L)}$$

که  $\sigma$  پارامتری است که مشخص کننده مکان متوسط جلوی شعله است.

## ۵- معادلات دامنه

معادلات دامنه توسط دستگاه کوپل زیر مشخص می شوند :

$$\begin{cases} \frac{dA}{d\tau} = \kappa A + \gamma_s A^3 - \gamma_b |B|^2 A \\ \frac{dB}{d\tau} = \chi A^2 B \end{cases} \quad (38)$$

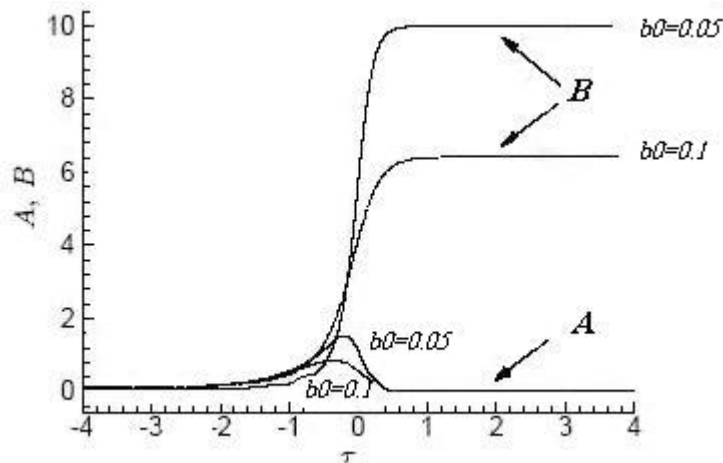
اگر A ثابت فرض شود، [۷]، B بصورت نمایی رشد می کند یعنی کوپلینگ یکطرفه است و فقط امواج اکوستیک روی شعله اثر دارند.

اثرات غیر خطی برهم کنش صوت و شعله با توجه علامت ضرایب مشخص می شود. با توجه به معادلات (۳۷) و (۳۴)،  $\gamma_b > 0$  و  $\text{Re}(\chi) > 0$ ، نشان می دهد که شعله همواره امواج اکوستیکی را تقویت می کند و امواج اکوستیکی باعث فرونشستن شعله می شود.

با فرض اینکه شعله و صوت در ابتدا ضعیفند، ترمهای غیرخطی از معادلات دامنه می توانند حذف شوند و شرایط اولیه بصورت زیر باشد:

$$b_0 \ll 1 \text{ و } \tau \rightarrow -\infty \text{ وقتی که } A \propto e^{k\tau}, B \propto b_0 \exp(\chi e^{2k\tau}) \quad (39)$$

در نمودار نشان داده شده (شکل ۳) برای  $b_0 = 0.1, 0.05$  با قراردادن  $\gamma_s$  و  $\gamma_b$  و  $\chi$  برابر یک، داریم:



شکل ۳- تغییرات غیر خطی دامنه ی اکوستیک B و دامنه ی شعله A

## ۶- نتیجه گیری

با اعمال تئوری غیر خطی ضعیف شده ی استوارت به معادلات هیدرودینامیک و اکوستیک شعله، دستگاه معادلات شامل دامنه ی امواج اکوستیک (B) و دامنه ی شعله (A) (معادله ی ۳۸) به دست آمد. با اعمال فرض های بیان شده و رسم نمودار حاصل، مشاهده می شود که دامنه ی امواج اکوستیکی مستقیماً به شکل شعله وابسته است. با توجه به شکل ۳، که تغییرات غیرخطی دامنه ی امواج اکوستیکی و شعله را نشان می دهد، پیداست که وقتی شعله در دامنه های کوچکتر قرار دارد دامنه امواج اکوستیکی هم کوچک و در همان حدود است. اما همانطور که آزمایش سیربای [۸] نشان داد، در تبدیل ناگهانی شعله از خمیده به تخت، یعنی تبدیل به یک مود ناپایدار، یک شیب ناگهانی در نمودارها بوجود می آید، یعنی تحلیل غیر خطی می تواند توجیهی برای آزمایش سیربای باشد و در نتیجه ناپایداری احتراق در اثر برانگیخته شدن و تقویت دامنه ی امواج اکوستیکی بوسیله شعله پدید می آید.

## مراجع

- 1- Polifke W., "Combustion Instabilities," VKI Lectures series, Advances in Acoustics and Applications, Brussels Belgium 2004.
2. Bloxside, G. J., Dowling, A. P. & Langhorne, P. J., "Reheat buzz: an acoustically coupled combustion instability," Part II. Theory *J. Fluid Mech.*, vol. 193, pp 445-473, 1988.
3. Dowling, A. P. "The calculation of thermoacoustic oscillations," *J. Sound Vib.*, vol. 180, pp 557-581, 1995.
4. Harten, A. V., Kapila, A. K. & Matkowsky, B. J. "Acoustic coupling of flames," *SIAM J. Appl. Math.* vol. 44, pp 982-995, 1984.
5. Clavin, P, Pelce, P. & He, L. "One-dimensional vibratory instability of planar flames propagating in tubes," *J. Fluid Mech.*, vol 216, pp 299-322, 1990.



6. Markstein, G. H, "Flames as amplifiers of fluid mechanical disturbances," *Proc. 6th Natl. Congr. Appl. Mech.*, Cambridge, Mass., pp 11-33, 1970.
7. Pelce, P. & Rochwerger, D. , "Vibratory instability of cellular flames propagating in tubes," *J. Fluid Mech.*, vol 239, pp 293-307, 1992.
8. Searby, G. , "Acoustic instability in premixed flames," *Comb. Sci. Technol.* vol 81, pp 221-231, 1992.
9. Stuart, J. T. , "On the nonlinear mechanisms of wave disturbances in stable and unstable parallel flows," Part I: The basic behaviour in plane Poiseuille flow. *J. Fluid Mech.*, vol 9, pp 353-370, 1960.
10. Matalon, M. & Matkowsky, B. J. , "Flames as gasdynamic discontinuities," *J. Fluid Mech.*, vol 124, pp 239-259, 1982.
11. Matkowsky, B. J. & Sivashinsky, G. I. , "An asymptotic derivation of two models in flame theory associated with the constant density approximation," *SIAM J. Appl. Math.*, vol 37, pp 686-699, 1979.
12. Pelce, P. & Clavin, P., "Influence of hydrodynamics and diffusion upon the stability limits of laminar premixed flames," *J. Fluid Mech.*, vol. 124, pp 219-237, 1982.
13. Wu X., Wang M., Moin P., "Combustion instability due to nonlinear interaction between sound and flame," Center for turbulence research, 2001.

### پیوست

جملات مرتبه ی دوم :

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial U_2}{\partial \xi} + \frac{\partial V_2}{\partial \eta} &= \frac{\partial V_1}{\partial \xi} \frac{\partial F_1}{\partial \eta} \\ R \frac{\partial U_2}{\partial t} + \frac{\partial U_2}{\partial \xi} &= -\frac{\partial P_2}{\partial \xi} - R \left\{ U_1 \frac{\partial U_1}{\partial \xi} + V_1 \frac{\partial U_1}{\partial \eta} \right\} \\ R \frac{\partial V_2}{\partial t} + \frac{\partial V_2}{\partial \xi} &= -\frac{\partial P_2}{\partial \eta} - R \left\{ U_1 \frac{\partial V_1}{\partial \xi} + V_1 \frac{\partial V_1}{\partial \eta} \right\} + \frac{\partial P_1}{\partial \xi} \frac{\partial F_1}{\partial \eta} - R G_c \frac{\partial F_2}{\partial \eta} + p'_{a,1}(0^\pm, t) \frac{\partial F_1}{\partial \eta} \\ F_{2,t} &= U_2(0^-, \eta, t) - V_1(0, \eta, t) \frac{\partial F_2}{\partial \eta} - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial F_1}{\partial \eta} \right)^2 \end{aligned} \right.$$

جملات مرتبه ی سوم :

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial U_3}{\partial \xi} + \frac{\partial V_3}{\partial \eta} &= \frac{\partial V_1}{\partial \xi} \frac{\partial F_2}{\partial \eta} + \frac{\partial V_2}{\partial \xi} \frac{\partial F_1}{\partial \eta} \\ R \frac{\partial U_3}{\partial t} + \frac{\partial U_3}{\partial \xi} &= -\frac{\partial P_3}{\partial \xi} - R A' U_1 - R \left\{ U_1 \frac{\partial U_2}{\partial \xi} + U_2 \frac{\partial U_1}{\partial \xi} + V_1 \frac{\partial U_2}{\partial \eta} + V_2 \frac{\partial U_1}{\partial \eta} \right\} \\ R \left\{ F_{0,\tau} + F'_{2,a} + V_1 \frac{\partial F_1}{\partial \eta} \right\} \frac{\partial U_1}{\partial \xi} &- R q \kappa^2 h(\xi) \frac{\partial U_1}{\partial \xi} + \text{Pr} \nabla^2 U_1 \\ R \frac{\partial V_3}{\partial t} + \frac{\partial V_3}{\partial \xi} &= -\frac{\partial P_3}{\partial \eta} - R A' V_1 - R \left\{ U_1 \frac{\partial V_2}{\partial \xi} + U_2 \frac{\partial V_1}{\partial \xi} + V_1 \frac{\partial V_2}{\partial \eta} + V_2 \frac{\partial V_1}{\partial \eta} \right\} \\ + p'_{a,1}(0, t) \frac{\partial F_2}{\partial \eta} &+ \frac{\partial P_1}{\partial \xi} \frac{\partial F_2}{\partial \eta} + \frac{\partial P_2}{\partial \xi} \frac{\partial F_1}{\partial \eta} - R_\pm G_c \frac{\partial F_3}{\partial \eta} \\ R \left\{ F_{0,\tau} + F'_{2,a} + V_1 \frac{\partial F_1}{\partial \eta} \right\} \frac{\partial V_1}{\partial \xi} &- R q \kappa^2 h(\xi) \frac{\partial V_1}{\partial \xi} + \text{Pr} \nabla^2 V_1 \\ F_{1,\tau} + F_{3,t} &= U_3(0^-, t) - V_1 \cdot \nabla F_2 - V_2 \cdot \nabla F_1 - \nabla F_1 \cdot \nabla F_2 \end{aligned} \right.$$